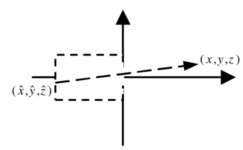
מצלמת חריר



$f(x,y)$ - התמונה

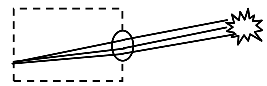
$\hat{x}=-\frac{x}{z}f(x,y)$

$\hat{y}=\frac{y}{z}f(x,y)$

$\hat{z}=-f$

חריר קטן – מעט אנרגיה עוברת – לא מספיק על מנת ליצור אפקט בפילם.
חריר גדול – השפעה של הרבה מקורות אור – תמונה מטושטשת.

מצלמת עדשה



כל הנקודות ממקור אור מסוים מתרכזות לאותה הנקודה

מודל למברטי

$E_r=E_i\rho(n_i\bullet n_s)$

E_r - האנרגיה המוחזרת.

E_i - האנרגיה של מקור האור הפוגע במשטח.

E_r - האנרגיה המוחזרת.

n_i - כיוון פגיעת האור.

n_s - כיוון האנך למשטח.

ρ - מקדם החזרה של המשטח.

המודל מתאים לגופים למברטיים (גופים שהם מט – לא נוצצים).

אותות

תכונות של אותות

האות $x(n)=n \bmod k,\ k\in\mathbb{N}\ n\in\mathbb{Z}$:

- חסום: $\forall n,\ |x(n)|<k$
- לא סופי: $\forall M\in\mathbb{N},\ \exists m>M,\ x(m)\neq 0$
- מחזורי: $\forall n,\ x(n)=x(n+k)$

אותות מיוחדים

דגם יחידה – הלם דיסקרטי: $\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\0 & otherwise\end{cases}$

מדרגת יחידה: $\mu(n)=\begin{cases}0 & n<0\\1 & otherwise\end{cases}$

נורמה

$\|g\|_p=\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}|g(i)|^p\right)^{1/p}$

עבור $p=2$ זוהי הנורמה האוקלידית – נקראת האנרגיה של האות.
משתמשים בנורמה האוקלידית לחשב שגיאה ריבועית ממוצעת – MSE.

הערה: אם אות בעל אנרגיה סופית אזי כל אחד מאיבריו חסום.

- אות מחזורי: $\forall n,\ g(n)=g(n+p)$.

ה- p המינימלי המקיים זאת נקרא המחזור.

$\sin(2\pi nt+\phi)$ מחזורי $\Leftrightarrow f$ רציונלי.

הערה: אות סופי שאינו זהותית אפס אינו מחזורי!

פעולות על אותות

- חיבור: $f_1(n)+f_2(n)=\{f_1(i)+f_2(i)\}$
- הכפלה בסקלר: $cf(n)=\{cf(i)\}$
- הזזה ב- k: $g(n)=f(n-k)$
- שיקוף: $g(n)=f(-n)$
- scaling ב-a: $g(n)=f(a\cdot n)$

מערכות

$g(m,n)=T[f(m,n)]$

חשוב לשים לב: $g(n_0)\neq T[f(n_0)]$ אלא $g(n_0)\neq T[\{f(n)\}]$.

- **מערכת חסרת זכרון**: תגובת המערכת ברגע הנוכחי תלויה אך ורק באות הכניסה ברגע הנוכחי. $g(n_0)=T[f(n_0)]$.
- **מערכת סיבתית**: יציאת המערכת ברגע n_0 תלויה רק בערכי f עבור $n\le n_0$
- **מערכת יציבה BiBo**: אם הקלט קלט חסום מוצא המערכת חסום.
- **מערכת לינארית**: מערכת המקיימת: $T[cx(n)]=cT[x(n)]$
$T[x_1(n)+x_2(n)]=T[x_1(n)]+T[x_2(n)]$
- **מערכת קבועה בהזזה**: אם $\hat{x}(n)=x(n-k)$ אז $\hat{y}(n)=y(n-k)$

מערכת LSI

מערכת אשר הנה לינארית וקבועה בהזזה.

קונבולוציה דיסקרטית: $f*g=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f(i)g(n-i)$

תכונות קונבולוציה:

1. קומוטטיבית $g*f=f*g$
2. אסוציטיבית $g*[f*q]=[g*f]*q$
3. דיסטריבוטיביות בחיבור $g*(f+p)=g*f+g*p$
4. הזזה בזמן: $(g*f)_{n-k}=g_{n-k}*f=f_{n-k}*g$
5. גזירה/אינטגרציה: $D(g*f)=(Df)*g=f*(Dg)$

תכונה שימושית: $g*f=(Df)*(Ig)$

תגובת ההלם: $h(n)\triangleq T[\delta(n)]$

עבור מערכת LSI: $f(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)\delta(n-i)$.

תחום התמיכה (תמך) של אות: התחום $[a,b]$ המינימלי מחוץ לו האות מתאפס.

אם התמך של x הנו $[a,b]$ ושל y הנו $[c,d]$ אזי התמך של $x*y$ הנו $[a+c,b+d]$.

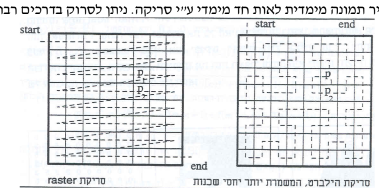
כשצריך לחשב $x*y$, ניתן לפרק את x לסכום הלמים מוזזים ולחשב לכל הלם מוזז את הקונבולוציה עם y ולחבר את כל האותות שקיבלנו.

מערכת LSI סיבתית: מערכת היא LSI וסיבתית $\Leftrightarrow$ $\forall n<0,\ h(n)=0$

מערכת LSI יציבה BiBo: מערכת היא LSI יציבה BiBo $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty$

תמונה כאות דו מימדי

ניתן להמיר תמונה מימדית לאות חד מימדי ע"י סריקה. ניתן לסרוק בדרכים רבות.



אותות דו מימדיים

אות הלם דו מימדי: $\delta(m,n)=\begin{cases}1 & m=n=0\\0 & otherwise\end{cases}$

- אות סופי: אם קיים M כך ש: $\forall(m,n)\notin[-M,M]\times[-M,M],\ f(m,n)=0$.
- הזזה דו מימדית: $g(m,n)=f(m+k_1,n+k_2)$.
- אות מחזורי: $\exists k_1,k_2,\ \forall m,n\ \ x(m,n)=x(m+k_1,n+k_2)$.
- אות פריד (ספרבילי): $f(m,n)=f_1(m)\cdot f_2(n)$.

אות הנו ספרבילי אם ניתן לפרק אותו לשני אותות דו מימדים כך שמכפלתם (וקטור עמודה בווקטור שורה) תתן את הווקטור המקורי.

האות הנו ספרבילי אם ורק אם דרגת המטריצה של האות הנה 1!

מוצאים את השורה הפורסת את כל המטריצה וממנה מחשבים את וקטור העמודה.

מערכות דו מימדיים

- חסרות זכרון – זהה למקרה החד מימדי.
- לינאריות – זהה למקרה החד מימדי.
- קבועה בהזזה – זהה למקרה החד מימדי.

סיבתיות – לא מוגדר היטב! יש להגדיר סדר בתחום הדו מימדי (לא חד משמעי).

במערכת LSI דו מימדית אות היציאה נקבע על ידי קונבולוציה דו מימדית.

$$g(m,n)=T[f(m,n)]=f*h=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}f(k,l)\cdot h(m-k,n-l)$$

מערכת פרידה: מערכת LSIהנה פרידה אם תגובת ההלם הנו אות פריד.

אם מערכת LSI פרידה:

$$g(m,n)=T[f(m,n)]=f*h=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}f(k,l)\cdot h(n-l)\right)h(m-k)$$

מערכת סביבה: $g(m,n)=T[f(m,n)]=T[\{f(i,j)|(i,j)\in N(m,n)\}]$.
כלומר המוצא בנקודה מסוימת תלוי רק בערכי הכניסה בסביבה של אותה נקודה.

מערכת הראיה האנושית

עדשה (Lens) – משמשת להדמיה. גורמת לדמות ממוקדת להיווצר על הרשתית במרחק מוקד של כ- .17mm

קרנית (Cornea) שכבה קשה ושקופה המגנה על העין.

צמצם (Iris) – נשלט ע"י שרירים ומפקח על כמות האור הנכנס.

רשתית (Retina) - מכילה קולטנים ורגישה לאור + מנגנון עיבוד ראשוני

כתם צהוב (Fovea) – מכיל ריכוז גבוה של קולטים

עצב אופטי (Nerve) – מוליך את האות הלאה.

על הרשתית מצויים שני סוגים של קולטים:

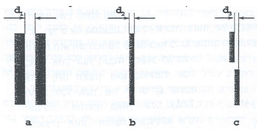
ה-rods: מפולגים אחיד על הרשתית. מספרם כ- 10^8 . רגישים יותר מ-Conesם אבל לא רגישים לצבע (ראיית לילה)

ה-Cones: קצרים יותר. מספרם רק $6.5\cdot10^6$ הם מרוכזים בכתם הצהוב בצפיפות של 450Cones/mm. אחראים לראיית פרטים וצבע אך רגישותם נמוכה יותר (ראיית יום).

גודל קולט: $2-2.3\mu m$. אורך מוקד עדשת העין: $17mm$.

הזווית הנתפסת ע"י קולט יחיד: $\frac{2.3\cdot10^{-6}}{17\cdot10^{-3}}=0.135\cdot10^{-3}\ rad=0.46'$.

ישנם בערך 130 קולטים למעלת זווית.

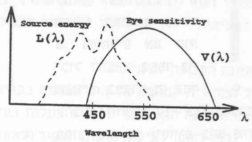


בניסוי a שואלים האם ניתן להבחין בפער בין הקווים. במקרה זה הסף הוא $0.5'-1'$ כפוי.

בניסוי c שואלים האם הקו הימני הוא העליון או התחתון. מתקבל דיוק של כמה שניות של זווית! (super resolution).

בניסוי b מבקשים רק לדווח על קימור של הקו. מתקבל דיוק של $0.5''$.

רגישות העין לשינוי בהירות: העין רגישה לאורכי גל שונים במידה שונה. $v(\lambda)$ מתאר את רגישות העין למקור אור מונוכרומטי.



ההבהירות הסובייקטיבית הנה: $I[luen]=\int L(\lambda)V(\lambda)d\lambda$.

$1[lux]=1[lumen]/[m^2]$. lumen – Lux ליחידת שטח.

תחושת הבהירות הנה פרופורציונלית ל-I באופן לינארי!.

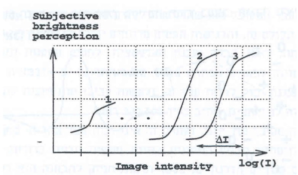
נבצע ניסוי בו יש משטח בבהירות B ריבוע בבהירות $B+\Delta B$.

חוק וובר: $\left.\frac{\Delta B}{B}\right|_{jnd}=const\approx0.02$ (just noticeable difference).

הפרש הבהירות בו ניתן להבין אינו קבוע והוא יחסי לעוצמה הממוצעת!

ייצוג מוסכם: $C=\log(B)$ (ייצוג פנימי).

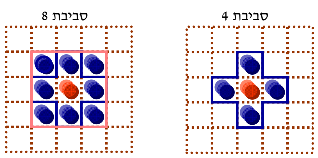
מערכת הראיה מתאימה את עצמה לעוצמת האור הממוצעת (ע"י הזזת העקום – ראה ציור). בתחום Δ_I (התחום האדפטיבי) תחושת הבהירות עולה מונ'. כל הגוונים הכהים מאלו שבתחום הנ"ל נתפסים כשחור אחיד. כנ"ל לגבי הלבן. תחום ההבחנה הנו בערך 2-3 יחידות לוגריתמיות. בתחום האדפטיבי יכולת ההבחנה היא כ-2% אך מחוץ לו לא ניתן להבחין בין שתי רמות גם אם הן רחוקות זו מזו.



באיור מופיעות שלוש דוגמאות של עקום הבהירות הסובייקטיבית.
בחירת העקום משתנה לפי הבהירות הממוצעת של התמונה.

רמת בהירות מסוימת יכולה להראות כלבן בהקשר אחד וכשחור בהקשר אחר!

תמונות בינאריות



מסלול-4 הינו מסלול שבו קיים קשר בין שכנים לאורך המסלול קשר בסביבה 4.
מסלול-8 כנ"ל רק עם קשר חלש יותר - קשר 8.

שתי נקודות P ו Q השייכות לאזור S נקראות **קשירות-m** אם בניהם קיים מסלול-m העובר באזור.

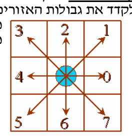
אם כל הנקודות באזור הן m-קשירות אזי האזור גם נקרא **m-קשיר**.

גבול(boundary) של אזור S הינו אוסף הנקודות של S שיש להן שכנים מחוץ ל-S (לפי סביבה מסוימת).

תכונה: אם גבול הוא גבול-4 אז קו הגבול הוא מסלול-8.

קוד שרשרת: דרך אחרת לקודד תמונה המורכבת מאזורים בעלי גוונים אחידים היא לקדד את גבולות האזורים.

מקודדים את נקודת ההתחלה, הגוון ואח"כ סדרה של מעברים ע"פ המספרים הנ"ל.



קידוד תמונה (לא בהכרח בינארית) (שורות ו- RLC)

אפשרות אחת היא לקודד כל שורה לחוד (RLC). אם בתמונה ישנם m צבעים אז רשום לכל קטע את צבעו ואורכו לדוגמא: g3r4b5g2.

הקידוד הזה הוא חסכוני כאשר תמונה מורכבת מאזורים גדולים בעלי גוון אחד. (השאיפה היא שהקידוד יהיה קצר ביותר).

לפעמים משתמשים בשיטת קידוד (RLC) ע"י נקודת התחלה ואורך של האזור בצבע מסוים (למשל שחור): (1,1)1, (1,3)2, (2,0) 2 .

חלוקה לאזורים קשירים

חלוקת תמונה לאזורים קשירים: מתן ערך מספרי שונה לכל קבוצת פיקסלים קשירה.

עבור על התמונה בסריקת raster (משמאל לימין, שורה שורה) וניתן לכל פיקסל ערך: אם הפיקסל בעל ערך 1,

- אם רק לאחד מהשכנים העליון והשמאלי (שכנות 4) יש מספר קבוצה (לפיקסל רקע אין מספר קבוצה) תן לפיקסל הנוכחי את אותו מספר.
- אם לשני השכנים מלמעלה ומשמאל יש אותו מספר, העתק את המספר.
- אם לשני השכנים מלמעלה ומשמאל יש מספר שונה,צרף את שתי הקבוצות לקבוצה אחת ותן ערך זה לפיקסל הנוכחי.
- אחרת הגמר קבוצה חדשה ותן לפיקסל ערך חדש זה.

פילטר גודל – Size Filter: פילטר גודל היא שיטה לסילוק רעש. הרעיון: בהינתן תמונה בינארית, מצא אזורים קשירים ומחק את כל האזורים הקשירים שגודלם מתחת לגודל מסוים.

מרחקים – Distances:

$$d_{Euclidean}([i_1,j_1],[i_2,j_2])=\sqrt{(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2}$$

$$d_{CityBlock}([i_1,j_1],[i_2,j_2])=|i_1-i_2|+|j_1-j_2|$$

$$d_{Chess}([i_1,j_1],[i_2,j_2])=\max(|i_1-i_2|,|j_1-j_2|)$$

טרנספורם מרחק וציר מרכזי (medial axis):

- טרנספורם מרחק (בתמונה בינארית) – החלף כל פיקסל 1 במרחק המינימלי בינו לבין הרקע (פיקסל 0) הקרוב ביותר.
- ציר מרכזי (medial axis) – קבוצת הפיקסלים שהם מקסימום מקומי (גדול או שווה לשכניו בסביבה 4) בתמונת טרנספורם המרחק.

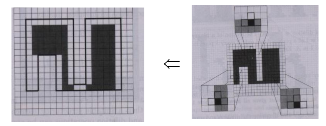
מורפולוגיה (Morphology):

הפעולות הבאות מוגדרות על תמונות בינאריות :

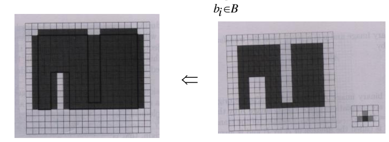
$$X \cap Y = \{p \mid p \in X \text{ and } p \in Y\}$$
$$X \cup Y = \{p \mid p \in X \text{ or } p \in Y\}$$
$$\overline{X} = \{p \mid p \notin X\}$$

הפעולה Ap: אם A היא תמונה בינארית ו p פיקסל, הפעולה Ap היא ההזזה של התמונה A ב p, כלומר הקורדינטות של הפיקסל (הראשית בA היא לא בהכרח בפינה השמאלית העליונה אלא תתכן בתוך התמונה). $A_p=\{a+p | a\in A\}$.

כרסום (Erosion): $X \Theta B \equiv \{p : Bp \subseteq X\}$



הרחבה (Dilation): $A\oplus B=\bigcup_{b_i\in B} A_{b_i}$.

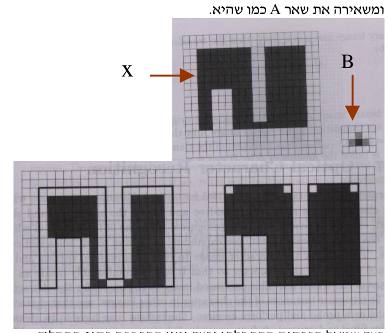


- Dilation היא פעולה אסוציאטיבית וקומוטטיבית.
- Erosion בין A ו- B נותנת תמונה שבה מודלקים הפיקסלים שבהם בתמונה A נכנסת תמונה B.

$A\Theta B=(A^c \oplus \breve{B})^c$ כאשר $\breve{B}$ הוא שיקוף B סביב הראשית.

פעולת Open: ביצוע כרסום ואח"כ הרחבה : $X\circ B=(X\Theta B)\oplus B$

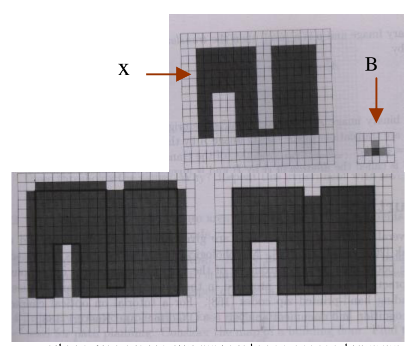
פעולת Open בין A ו- B מוחקת מ-A את הפיקסלים באזורים קטנים מדי להכיל את B ומשאירה את שאר A כמו שהיא.



בצד שמאל הכרסום ההתחלתי ובצד ימין ההרחבה בסוף התהליך.

פעולת Close: היא הרחבה ואח"כ צמצום. $X\bullet B=(X\oplus B)\Theta B$.

פעולת Close סוגרת חורים ב- A הקטנים מלהכיל את B.



בצד שמאל ההרחבה ההתחלתית ובצד ימין הכרסום בסוף התהליך.

Template Matching

תמונת היחוס , נקראת Template (אותה מחפשים) :

$Iref(x,y) \quad ,x=1...n \quad ,y=1...m$.

התמונה בה מתבצע החיפוש : $I(x,y) \quad ,x=1...N \quad ,y=1...M$.

נחפש u,v כך ש $I(x+u, y+v) \quad , x=1...n \quad , y=1...n$

זהה ל- $Iref(x,y)$.

נעבור על כל ערכי x ו-y האפשריים ונשמור את אלו הנותנים תוצאה הכי טובה (או מעל סף מסוים).

נסמן ב- $f(I_1,I_2)$ את מידת הקרבה בין 2 התמונות.

התאמה מושלמת:

$$f(I_1,I_2)=\begin{cases}1 & I_1(x,y)=I_2(x,y) \quad \forall x=1..n \ , \ y=1..m \\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

זו גישה נאיבית שאינה עובדת באופן מעשי. מספיק רעש קל ביותר ע"מ שהשיטה לא תעבור.

שגיאה ריבועית: $f(I_1,I_2)=\frac{1}{n\cdot m}\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\left[I_1(x,y)-I_2(x,y)\right]^2$

ההתאמה מוגדרת בכל המקומות שבהם f(I1,I2)<=Tol וגם מינימום מקומי.
מענישה בחומרה על אי התאמות גדולות, לכן רגישה לרעש Salt & Pepper
רגישה לשינויים ברמת התאורה.

ערך מוחלט של השגיאה:

$$f(I_1,I_2)=\frac{1}{n\cdot m}\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\left|I_1(x,y)-I_2(x,y)\right|$$

ההתאמה מוגדרת בכל המקומות שבהם f(I1,I2)<=Tol וגם מינימום מקומי.
מענישה פחות בחומרה על אי התאמות גדולות לעומת השגיאה הריבועית.
רגישה לשינויים ברמת התאורה.

קורלציה מנורמלת:

$$f(I_1,I_2)=\frac{\left|\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}I_1(x,y)\cdot I_2(x,y)\right|}{\sqrt{\left(\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}I_1^{\,2}(x,y)\right)\left(\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}I_2^{\,2}(x,y)\right)}}$$

ההתאמה מוגדרת בכל המקומות שבהם f(I1,I2)>=Tol וגם מכסימום מקומי.
פחות רגישה לשינויים בתאורה, אם המודל של שינוי תאורה הוא של הכפלת רמות האפור בקבוע אזי טיב ההתאמה לפי קורלציה מנורמלת אינו משתנה.
צריך להוסיף Epsilon למכנה למנוע חלוקה באפס.

קורלציה מנורמלת עם חיסור ממוצע:

$$f(I_1,I_2)=\frac{\left|\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\left(I_1(x,y)-\bar{I}_1\right)\left(I_2(x,y)-\bar{I}_2\right)\right|}{\sqrt{\left(\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\left(I_1(x,y)-\bar{I}_1\right)^2\right)\left(\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\left(I_2(x,y)-\bar{I}_2\right)^2\right)}}$$

$\bar{I}_1,\bar{I}_2$ - הערכים הממוצעים בתמונות.

ההתאמה מוגדרת בכל המקומות שבהם f(I1,I2)>=Tol וגם מכסימום מקומי.
לא רגיש למודל של שינוי תאורה המתבטא בטרנספורמציה לינארית של רמות האפור.
צריך להוסיף Epsilon למכנה.

שיפור תמונות

היסטוגרמה: $hist_g(\alpha)=|\{(i,j):g(i,j)=\alpha\}|$

מתיחת היסטוגרמה: כדי למתוח היסטוגרמה של תמונה בטווח גוונים [a,b] לטווח [0,d] נשתמש בנוסחה $x^{new}=\frac{x^{old}-a}{b-a}\cdot d$.

איזון היסטוגרמה: $0\le r\le 1$ $\quad s=T[r]=F_r(r)=\int_0^r p_r(w)dw$

מביאה להתפלגות אחידה.

איזון הסטוגרמה (מקרה בדיד): $F_r(r)=\sum_{i=0}^{r}p_r(i)=\sum_{i=0}^{r}\frac{n_i}{N}$

כש L- כמות רמות האפור האפשריות בתמונה (רוחב הטווח הרצוי).

מעבר להיסטוגרמה רצויה:

נתון : תמונה בעלת פילוג רמות אפור $p_x(x)$.

פונקצית צפיפות הסתברות כלשהי : $p_s(s)$.

<u>צריך למצוא :</u> התמרה $s=T[x]$ כך ש- s יפולג ע"פ $p_s(s)$.

<u>פתרון :</u> נשתמש בכך ש- $y=F_x(x)$ מפולג אחיד וגם $y=F_s(s)$ מפולג אחיד.

$s=F_s^{-1}(y)$ מעביר מ"מ מפולג אחיד y למ"מ s מפולג לפי $p_s(s)$. נציב את y ונקבל $s=F_s^{-1}(F_x(x))$.

אותות במשתנים רציפים

אות מדרגה: $\mu(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$

פונקציית ההלם הרציפה: לכל $\varphi(x)$ רציפה ב-x=0 מתקיים,

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$. **מסקנה:** $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)=1$.

$\delta'(x)$ מקיימת : $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi'(0)$.

$$\mu'(x)=\delta(x)$$

כל אות רציף ניתן להציג באופן הבא : $g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\psi)\delta(x-\psi)d\psi$.

<u>קונבולוציה רציפה</u> : $y(x)=u*v=\int_{-\infty}^{\infty}u(\psi)v(x-\psi)d\psi$

מקיימת :

. קומטטביות $g*f=f*g$
2. אסוציטיביות $g*[f*q]=[g*f]*q$
3. דיסטרביוטיביות בחיבור $g*(f+p)=g*f+g*p$
4. הזזה בזמן : $(g*f)_{n-k}=g_{n-k}*f=f_{n-k}*g$
5. גזירה/אינטגרציה : $D(g*f)=(Df)*g=f*(Dg)$

<u>תכונה שימושית</u> : $g*f=(Df)*(Ig)$

תנאים <u>מספקים</u> לקיום הקונבולוציה:

1. $|u(x)|<M_1$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty}|v(x)|dx<M_2$
2. $|u(x)|<M_1$ וגם v(x) מתאפס מחוץ לקטע סופי.

סינון רעש

$g(j,k)=\underbrace{s(j,k)}_{\text{orig singal}}+\underbrace{n(j,k)}_{\text{noise}}$. נניח כי $n(j,k)$ (משתנה מקרי) אינו תלוי ב-j ו-k וכמו כן אינו תלוי ב-s. נשאף למזער מדד שגיאה כלשהו ע"י בחירת ערך מייצג כלשהו $\tilde{g}(j,k)$ של רמות האפור בסביבה.

שגיאה ריבועית – MSE: על מנת למזער את השגיאה הריבועית על סביבה של נקודה (j,k) יש לבחור בממוצע רמות האפור בסביבה זו.
ניתן לתת משקל לכל נקודה בסביבה כך שיתקבל ממוצע משוקלל הממזער את :

$$\sum_{(j_i,k_i)\in N(j,k)} c\left(g(j_i,k_i)-\tilde{g}(j,k)\right) .$$

שגיאת הערך המוחלט: ע"מ למזער את שגיעת הערך המוחלט יש לבחור בחציון ערכי האפור בסביבה.
בחירה זו אינה "מחליקה" שפות ולכן לא מטשטשת התמונה.

מערכות LSI רציפות

$h(x)\triangleq T[\delta(x)]$. $\quad T[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(\psi)h(x-\psi)d\psi$

מערכות LSI רציפות דו מימדיות

$\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y)$.

$T[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\psi,\zeta)h(x-\psi,y-\zeta)d\psi d\zeta$.

התמרת HOUGH

התמרה המעבירה ותנו ממישור x,y למישור r,θ .

1. לכל נקודה במישור r,θ מתאים ישר במישור x,y.
2. לכל נקודה במישור x,y מתאים גל סינוס במישור r,θ . (כל הישרים העוברים בנקודה זו).

$$r=x\cos\theta+y\sin\theta=\rho\left(\frac{x}{\rho}\cos\theta+\frac{y}{\rho}\sin\theta\right)=\rho(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)=\rho\cos(\theta-\alpha)$$

כאשר : $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ ו- $\alpha=\arccos\frac{x}{\rho}$.

עבור כל נקודה במישור x,y שהיא אחד (התמונה בינארית) נעבור על גל הסינוס במישור r,θ ונגדיל הערכים בכל נקודה בה הסינוס עובר ב-1.

כעת נמצא מקסימום מקומי ב- r,θ ואלו הנקודות שנבחר (הקווים במישור x,y).

<u>גילוי שפות:</u> $grad(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. $|grad(f)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$.

$\alpha(x,y)=\arctan\left(\frac{\partial f/\partial y}{df/\partial x}\right)$. כיוון הגרדיאנט מציין את הכיוון בו רמות האפור משתנות באופן המקסימלי.

חישוב הגרדיאנט:

sobel

מסנן לחשוב נגזרת בכיוון y

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

מסנן לחשוב נגזרת בכיוון x

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

prewitt

מסנן לחשוב נגזרת בכיוון y

1	1	1
0	0	0
-1	-1	-1

מסנן לחשוב נגזרת בכיוון x

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

גילוי השפות מתבצע ע"י העברת גודל תוצאת המסנן דרך פעולת סף.

אותות עצמיים

מכפלה פנימית $\langle u,v\rangle$ חייבת לקיים :

1. סימטריות : $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$.
2. לינאריות : $\langle u_1+u_2,v\rangle=\langle u_1,v\rangle+\langle u_2,v\rangle$
3. הומוגניות : $\langle \alpha u,v\rangle=\alpha\langle u,v\rangle$

הנורמה מוגדרת להיות : $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$.

אי שיוויון קושי שוורץ: $\langle u,v\rangle^2\le\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$

בסיס יקרא **אורתוגונלי** אם : $\forall e_i,e_j\in E,\ i\ne j\Leftrightarrow\langle e_i,e_j\rangle=0$.

בסיס יקרא **אורתונורמלי** אם : $\forall e_i,e_j\in E,\ \langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}0 & i\ne j\\ 1 & i=j\end{cases}$.

אם בסיס הנו אורתוגונלי קל מאוד למצוא את היטלי כל וקטור על הבסיסים (המקדמים).

$u=\sum\langle u,e_i\rangle e_i\Rightarrow a_i=\langle u,e_i\rangle$.

אם הבסיס אורתוגונלי, מציגים את u כסכום של בסיסים ומנצלים את תכונות האורתוגונליות.

אותות מרוכבים

עבור אותו מרוכבים : $\langle u,v\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\bar{v}(x)dx$.

תנאי סימטריה עבור אותות מרוכבים : $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$.

אות עצמי הנו אות המקיים : $T[f(x)]=cf(x)$.

טורי פורייה

עבור קטע סופי $[-L,L]$ הסדרה $\left\{e^{2\pi i x n/2L}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ מהווה בסיס לאותות בתחום זה כאשר כל איבר בסדרה הנו אות עצמי במערכת LSI. משפחה זו הנה בסיס אורותונורמלי.

$$. T[e^{2\pi ifx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi if(x-\psi)}h(\psi)d\psi = e^{2\pi ifx}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi if\psi}h(\psi)d\psi}_{H(f)}$$

$H(f)$ - נקראת תגובת התדר של המערכת.

טור פורייה בקטע $[a,b]$ **:** $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i\frac{n}{b-a}x}$

כאשר: $c_n = \left\langle f, e^{2\pi i\frac{n}{b-a}x}\right\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)e^{-2\pi i\frac{n}{b-a}x}dx$.

- עבור אות ממשי זוגי – מקדמי טור פורייה הם ממשיים!
- עבור אות ממשי אי זוגי – מקדמי טור פורייה הם מדומים טהורים.

טור פורייה מתכנס עבור $\| \|_2$ נקודתית! (לא בהכרח במידה שווה).

תופעת גיבס: הטור אינו מתכנס לאות המקורי בסביבת נקודות אי רציפות עבור מספר איברים סופי גדול כרצוננו.

משפט:

- אות u(x) הנו ממשי $\Leftrightarrow$ $c_n=\overline{c}_{-n}$

משפט פרסוול: $\|u(x)\|_2^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\overline{c}_n$

טור פורייה של גל ריבועי: $c_n=\begin{cases}0.5 & n=0\\ 0 & \text{n is even}\\ \frac{\mathrm{i}}{\pi n} & \text{n is odd}\end{cases}$

חישוב תגובת מערכת LSI בעזרת טור פורייה:

$$v(x)=T[u(x)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{c_nH\left(\frac{n}{2L}\right)}_{d_n}e^{2\pi i\frac{n}{2l}x}$$

צעדים:

1. מתוך h(x) חשב את H(f): $H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi if\psi}h(\psi)d\psi$.
2. ייצג את אות הכניסה כטור פורייה: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi i\frac{n}{b-a}x}$

   $c_n=\left\langle f,e^{2\pi i\frac{n}{b-a}x}\right\rangle=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)e^{2\pi i\frac{n}{b-a}x}dx$
3. חשב $d_n=c_nH\left(\frac{n}{2L}\right)$.
4. סכם הטור

שיטה זו נקראת חישוב במישור התדר.

$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi if\psi}h(\psi)d\psi$ וכמו כן $h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(f)e^{2\pi ift}df$.

טור פורייה מתכנס לפונקציה המקורית בקטע הסופי $[a,b]$ עבורו פותח, ומתכנס להמשכו המחזורי של קטע זה מחוץ לו. (אם האות המקורי מחזורי בקטע הנ"ל אזי טור פורייה מתכנס אל אות זה בכל המישור).

אם רוצים לפתח טור פורייה לפונקציה לא מחזורית בקטע אינסופי משתמשים בהתמרת פורייה הרציפה.

משפט הקונבולוציה:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{if } f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_ne^{in\pi x/L} \text{ and } g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_ne^{in\pi x/L}\\ \text{then } f(x)*g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2L\cdot f_n\cdot g_n)e^{in\pi x/L}\end{array}}$$

הערה חשובה: הקונבולוציה המתוארת במשפט זה הנה קונבולוציה על מחזור אחד בלבד ולא אינסופית כפי שראינו בעבר!

חיבור שני מערכות LSI בטור: ראינו בעבר כי ניתן לבצע קונבולוציה בין תגובות ההלם שלהן ולקל תגובת הלם של המערכת כולה. ניתן במישור התדר לחשב את תגובת התדר הכללית ע"י הכפלת תגובות ההלם ונקבל תגובת הלם שקולה למערכת הכללית.

אותות עצמיים במערכות LSI

ניתן למצוא מערכת הופכית למערכת LSI (אם קיימת כזו) ע"י שימוש בתגובת התדר. אם עבור מערכת LSI כלשהי תגובת התדר נתונה ע"י $H(f)$ אזי המערכת ההופכית לה היא המערכת המאופיינת ע"י תגובה תדר $H^{-1}(f)=\frac{1}{H(f)}$. קל לראות כי התנאי לקיום מערכת LSI הופכית הנו: $\forall f,\ H(f)\neq 0$.

חיבור מערכות LSI בטור: בחיבור מערכות LSI בטור יש להכפיל את תגובות ההלם של המערכות לקבלת תגובת ההלם של המערכת הכוללת.

רכבת הלמים: $u(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nL)$ עבור הפוקנציה הנ"ל מקדמי טור פורייה הנם: $c_n\equiv\frac{1}{L}$. $\Leftarrow$ $u(x)=\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2\pi i\frac{n}{L}x}$

אותו מוגבלי סרט: אות נקרא מוגבל סרט אם קיים תדר f_c כך שאם $\left|\frac{n}{2L}\right|>f_c$ אז $c_n=0$.

נתבונן בפונקציה: $u_s(x)=u(x)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nL_s)$. זוהי דגימה של האות u(x).

נשים לב כי: $u_s(x)=u(x)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nL_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(nL_s)\delta(x-nL_s)$.

אם נפתחו לטור פורייה נקבל: $u_s=\frac{1}{L_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi i\left(\frac{m}{L_s}+\frac{n}{2L}\right)x}$.

נשים לב שבמישור התדר נקבל העתקים של המקדמים המקוריים של הטור סביב $\frac{k}{L_s}$.

תנאי הדגימה של נייקווסט: יהא u אות רציף ומוגבל סרט ע"י f_c . אם נדגום אותו באינטרוולים של L_s כך ש- $f_s=\frac{1}{L_s}>2f_c$ כל המידע באות המקורי נשמר וניתן לשחזר את האות המקורי ע"י מסנן בתחום התדרים $[f_s-f_c, f_s+f_c]$. (העתקי המקדמים שסביב L_s לא נפגשים אם אלו שסביב L_{s-1} ו- L_{s+1}).

משפט הדגימה: יהא u(x) אות רציף ומוגבל סרט ע"י f_c . ותהא $\{u_n=u(nL_s)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ סדרת דגימותיו במרווחים קבועים, L_s . אם $f_c<\frac{1}{2L_s}$

אז: $u(x)=\frac{1}{L_s}\sum u_n\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi(\mathrm{x}-\mathrm{nL_s})}{\mathrm{L_s}}\right)$

אותות דיסקרטיים סופיים

האותות ההרמוניים המרוכבים הדיסקרטיים הם פונקציות עצמיות של מערכות LSI דיסקרטיות. הערך העצמי שלהן הוא תגובת התדר הדיסקרטית.

לאותות הרמוניים מרוכבים בדידים יש מחזוריות T=2L באינדקס n (שאין לאותות רציפים):

$$e^{i2\pi f_0(n+T)x} = e^{i2\pi f_0nx}e^{i2\pi f_0Tx} =$$
$$e^{i2\pi f_0nx}(\cos 2\pi f_0Tx+i\sin 2\pi f_0Tx)=e^{i2\pi f_0nx}$$

לכן: אם נרצה (בצורה אנלוגית לטורי פורייה) לקרב אות בדיד בקטע שאורכו T, ע"י אותות הרמוניים מרוכבים בדידים נוכל לצמצם את הבסיס לקבוצה סופית כי:

$$\left\{e^{i2\pi(f_0n)x}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}=\left\{e^{i2\pi(f_0n)x}\right\}_{n=0}^{T-1}=\left\{e^{i2\pi(f_0n)x}\right\}_{n=h}^{T+h-1}$$

בסיס זה הנו אורתוגונלי ביחס למכפלה פנימית:

$$\left\langle e^{j(2\pi f_0)k_1t},e^{j(2\pi f_0)k_2t}\right\rangle=\sum_{t=0}^{T-1}e^{j(2\pi f_0)(k_1-k_2)t}$$

אם $k_1=k_2 \bmod T$ אזי ערך המכפלה הפנימית T.

ייצוג כטור פורייה:

$$x[t]=\frac{1}{T}\sum_{k=<T>}\left\langle x,e^{j(2\pi f_0)kt}\right\rangle e^{j(2\pi f_0)kt}\qquad \mathrm{t}\in\{\mathrm{h},...,\mathrm{T}+\mathrm{h}\text{-}1\}$$

$$X[k]=\frac{1}{T}\left\langle x,e^{j(2\pi f_0)kt}\right\rangle=\frac{1}{\mathrm{T}}\sum_{t=h}^{T+h-1}x[t]e^{-j(2\pi f_0)kt}$$
$$k\in\{0,1,...,T-1\}$$

אם האות x מחזורי, ונבחר את T כזמן המחזור נקבל שהייצוג מדויק בכל התחום:

$$x[t]=\frac{1}{T}\sum_{k=<T>}\left\langle x,e^{j(2\pi f_0)kt}\right\rangle e^{j(2\pi f_0)kt}\qquad t\in Z$$

כאשר המכפלה בפנימית היא על פני מחזור אחד.

תכונות ה-DFT:

1. ליניארית: $z[t]=ax[n]+by[n]\rightarrow Z[k]=aX[k]+bY[k]$
2. סימטריות: אם x ממשי ניתן לראות מתכונות מספרים מרוכבים:

   $X^*[k \bmod T] = X[-k \bmod T]$

   $\arg\{X[k]\} = -\arg\{X[-k]\}$
3. הזזה בזמן: $x[t-t_0]\xleftrightarrow{DFT}e^{-ik(2\pi f_0)t_0}X[k]$

   כלומר הזזה בזמן מתבטאת ע"י הזזה בפזה במישור התדר.
4. הזזה בתדר $e^{ik_0(2\pi f_0)t}x[t]\xleftrightarrow{DFT}X[k-k_0]$
5. קונבולוציה:

   $$x[t]\cdot y[t]\xleftrightarrow{DFT,T}(X\otimes Y)[k]=\sum_{l=<T>}X[l]\cdot Y[k-l]$$
   $$(x\otimes y)[t]=\sum_{l=<T>}x[l]y[t-l]\xleftrightarrow{DFT,T}T\cdot X[k]\cdot Y[k]$$

   נשים לב שהקונבולוציה היא לאורך מחזור T בין ההמשכה המחזורית של שני האותות. לקונבולוציה כזו קוראים קונבולוציה ציקלית או מעגלית.
6. דואליות: אם $x[t]\xrightarrow{DFT}X[k]$ אז $X[t]\xrightarrow{DFT}\frac{1}{T}x[-k]$.
7. משפט Parseval: $\frac{1}{T}\sum_{t=<T>}|x[t]|^2=\sum_{k=<T>}|X[k]|^2$

ניתן לחשב קונבולוציה רגילה ע"י קונבולוציה ציקלית אם נוסיף ריפוד אפסים מתאים:
$[1,2,3,4]*[0,1,2,3]=[1,2,3,4,0,0,0]\otimes[0,1,2,3,0,0,0]$.

תכונה חשובה: $e^{2\pi i\left(\frac{n}{L}\right)k}=e^{2\pi i\left(\frac{L-n}{L}\right)k}$

מישור הזמן	אותות מחזורים	אותות לא מחזוריים	
רציף משתנה t	**Fourier Series** $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]e^{j(2\pi f)kt}$ $X[k]=c_k=\left\langle x(t),e^{j(2\pi f)kt}\right\rangle=$ $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{<T>}x(t)e^{-j(2\pi f)kt}dt$ $x(t)$ has period $\mathrm{T}=\frac{1}{f}$ f is fixed	**Fourier Transform** $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}dk$ (inverse Fourier transform) $X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$ (Fourier transform)	לא מח-זורי
בדיד משתנה t	**Discrete Time Fourier Series or Discrete Fourier Transform (DFT)** $x[t]=\sum_{k=<T>}X[k]e^{j(2\pi f)kt}$ $X[k]=\left\langle x,e^{j(2\pi f)kt}\right\rangle=\frac{1}{\mathrm{T}}\sum_{t=<T>}x[t]e^{-j(2\pi f)kt}$ $x(t)$ and X[k] has period $\mathrm{T}=\frac{1}{f}$ f is fixed	**Discrete Time Fourier Transform** $x[t]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(k)e^{j2\pi ft}df$ (inverse DT Fourier transform) $X(f)=\sum_{t=-\infty}^{\infty}x[t]e^{-j2\pi ft}$ (DT Fourier transform)	מח-זורי
	בדיד משתנה k	רציף משתנה f	מישור התדר

אותות פורייה דו מימדיים

פונקצית הבסיס הנה מהצורה $e^{2\pi i(xf_x+yf_y)}$.

אם התחום מלבני סופי: $g(x,y)=\sum_{m-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{m,n}e^{2\pi i\left(x\frac{m}{2L_x}+y\frac{n}{2L_y}\right)}$.

כאשר $c_{m,n}=G(f_x,f_y)=\int_{-L_y}^{L_y}\int_{-L_x}^{L_x}g(x,y)e^{-2\pi i\left(x\frac{m}{2L_x}+y\frac{n}{2L_y}\right)}dxdy$

דוגמא חשובה:

עבור $g(x,y)=\begin{cases}1 & |\mathrm{x}|\le a, |y|\le b\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

התמרת פורייה המתאימה: $G(f_x,f_y)=4ab\,\mathrm{sinc}(2\pi af_x)\mathrm{sinc}(2\pi bf_y)$

:RADIX-2 FFT

$$N\text{ - point DFT}:\qquad X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\qquad 0\le k\le N-1$$
$$\text{where}\qquad W_N=e^{-j2\pi/N}$$
$$=>\ \begin{array}{l}N^2\text{ complex multiplications}\\ N^2-N\text{ complex additions}\end{array}$$

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\qquad 0\le k\le N-1\\ &=\sum_{n\text{ even}}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n\text{ odd}}x(n)W_N^{kn}\\ &=\sum_{m=0}^{(N/2)-1}x(2m)W_N^{2mk}+\sum_{m=0}^{(N/2)-1}x(2m+1)W_N^{k(2m+1)}\qquad (W_N^2=W_{N/2})\\ &=\sum_{m=0}^{(N/2)-1}x(2m)W_{N/2}^{km}+W_N^k\sum_{m=0}^{(N/2)-1}x(2m+1)W_{N/2}^{km}\qquad \text{Notice periodicity with } k\end{aligned}$$

$(N/2)-\text{point DFT}$

$$=>\ \begin{array}{l}N^2/2+N/2\text{ complex multiplications}\\ N^2/2\text{ complex additions}\end{array}$$

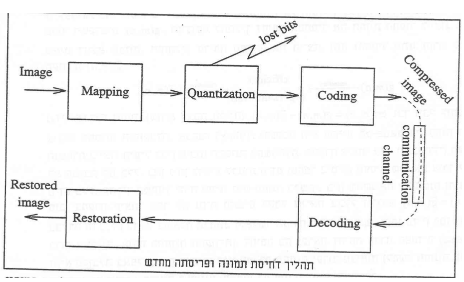
If N is a power of 2, this splitting can be performed recursively log2N times, thus reducing the complexity from $O(N2)$ to $O(N\log N)$.

דחיסת תמונה

מחלקים את תהליך דחיסת התמונה ל-3 שלבים:

1. מיפוי – שינוי התמונה לייצוג חסכוני יותר ומשמר את כל האינפורמציה!
2. קוונטיזציה – ייצוג תוצאות המיפוי באורך מילה סופי ומעבר על ידי כך מייצוג מדויק לייצוג מקורב. תהליך זה אינו משמר.
3. קידוד – קביעת מילת קוד לכל אפשרות כך שאורך הקוד הכללי המתאר את תוצאת הקוונטיזציה יהיה מינימלי.

הערה: לא כל שיטה נעזרת בכל שלושת השלבים.



תהליך דחיסת תמונה ופריסת מחדש

קביעה יעילה של קידוד תוך שימוש במידע סטטיסטי

ניתן תמיד לקודד תוך כדי שימוש בקידוד הטבעי (מספרים בינארים עוקבים).

נגדיר 4 מחלקות של קידודים:

1. קוד סינגולרי (singular) – כל קוד כללי. אינו דרוש אפילו כי ערכים שונים ימופו לערכים שונים.
2. קוד לא סינגולרי אך לא חד פענח (not uniquely decipherable) – ערכים שונים ממופים לערכים שונים אך בהנתן מילה בקידוד יתכן כי התקבלה מ-2 מילים או יותר מקוריות שונות.

3. קוד חד פענח אך לא מיידי (not instantaneous) – כל מילה מקודדת ניתנת לפענוח באופן יחיד אך הפענוח אינו מיידי, כלומר לא ניתן לפענח את הסימבולים המקוריים מבלי להסתכל על המשך המילה. (קוד פרפיקסי)
4. קוד מיידי.

הקוד הבינארי הטבעי הוא חד משמעי ורגעי אך לא תמיד יעיל.

<u>אנטרופיה:</u> האנטרופיה מאפיינת את האקראיות שבמשתנים המקריים. אפשר להגיד כי היא מחשבת את ה"הפתעה הממוצעת".

$$H=-\sum_{i=1}^{M} p_i \log(p_i).$$

<u>תמיד מתקיים כי:</u>

$$0 \le H \le \log M$$

עבור המקרה בו אחת ההסתברויות הנה 1 והשאר 0 נקבל אנטרופיה של 0 (כלומר אין שום הפתעה בערכים שנקבל).

<u>אורך הקוד הממוצע:</u> $R=\sum_{i=1}^{M} p_i \beta_i$ כאשר β_i הנו אורך המילה המשמשת לקידוד הסימבול ה-i.

<u>תמיד מתקיים</u>: $H \le R$.

<u>קוד האפמן:</u> קוד האפמן הינו אופטימאלי במובן שהוא ממזער את אורך הקוד הממוצע בהינתן התפלגות הסימבולים בקוד.

<u>אלגי' לבניית קוד האפמן:</u>

1. אתחול: M עלים בודדים (ללא קשתות). כל עלה הנו תת עץ קשיר בעל עלה יחיד.
2. בצע M-1 פעמים:
   בחר שני תתי עץ קשירים בעלי המשקלים הנמוכים ביותר, הוסף קודקוד (פנימי) חדש, ותלה תחתיו את שני תתי העץ כבניו כך שיתקבל תת עץ חדש, המכיל את שניהם.

עבור על העץ מהשורש מטה ולכל קשת ימנית תן 1 (או 0) ולשמאלית 0 (או 1). אוסף האפסים והאחדים מהשורש עד לעלה מסוים מגדירה את הקידוד של הסימבול שבעלה זה.

<u>האם ניתן לשפר את החסם שהאנרופיה מציבה?</u>

אם מקודדים כל אחד מהערכים אז לא!

אם מקודדים זוגות של ערכים (או באופן כללי n-יות) לפעמים ניתן לשפר את אורך הקוד הממוצע כך שיהיה אף קטן מהאנטרופיה.

<u>קידוד הפרשים</u>

מתאימה לתמונות ברמות אפור אמיתיות. לרוב הפיקסלים אין שכנים בהם ערכי האפור משתנים באופן חד (כלומר ישנה תלות סטטיסטית בין ערכי פיקסלים שכנים).
לכן ניתן לסרוק את התמונה (למשל בסריקת raster) ולרשום בכל צעד את ההפרש בין רמת האפור בין הפיקסל הנוכחי לפיקסל הקודם.
נקבל אמנם ערכים בטווח $[-255,255]$ (פי שניים מתחום הערכים בקידוד רגיל)
אבל ההיסטוגרמה שלהם בד"כ צרה מאוד ואת אי האחידות הזו ניתן לנצל בעזרת קוד האפמן. ניתן לקבל דחיסה <u>חסרת עיוותים</u> של 1:2 בערך.

<u>Run length code</u>

בשיטה זו משייכים קוד בינארי לקבוצות של פיקסלים. בשלב המיפוי סורקים את התמונה בסדר raster ומחלקים את סדרת רמות האפור לתת סדרות כך שבכל סדרה הערכים זהים. סדרה כזו נקראת <u>run</u>
העיקרון המנחה באלג' זה הוא שיש לקבץ את הפיקסלים בתמונה ל"קבוצות אופייניות". יש כאן פשרה בין שני דרישות מנוגדות:

1. הקבוצות גדולות ככל האפשר כך שיהיה ניתן לתאר התמונה בעזרת מספר קטן של קבוצות.
2. מספרן של הקבוצות האפשריות יהיה קטן (ע"מ שקידוד מספר האפשרויות יהיה קטן).

כדי להבטיח שלא יהיו יותר מדי קבוצות נהוג להתחיל run לאחר אורך מסוים.

לסיכום, run length code מבצעת:

1. מיפוי – סריקת התמונה והמרתה לסדרות בהן רמות אפור קבועות
2. קוונטיזציה – אין. הדחיסה משמרת.
3. קידוד – כל שיטה המתייחסת לסטטיקה (קוד האפמן למשל).

<u>Double Delta Coding</u>

מבוסס על RLC אבל במקום לקודד את אורך ה run מקודדים את נקודת ההתחלה על ידי שמירת ההפרש מתחילת ה-run בשורה שמעליו.

<u>JPEG</u>

JPEG היא שיטת קידוד המשתמשת בהתמרת פורייה. הבסיס לקידוד הוא שסילוק התדרים הגבוהים לא יפגע בתמונה (מבחינת המתבונן).
שיטת הדחיסה מתבסס על ארבעת השלבים הבאים:

- חלקות התמונה לתת תמונות ריבועיות (בלוקים אופייניים) לרוב בגודל 8x8.
- קוונטיזציה של מקדמי ההתמרה (באופן בלתי אחיד ע"פ חשיבות המקדם)
- השמת מילות קוד למקדמים ע"פ אפיונם הסטטיסטי.

מחלקים התמונה לבלוקים משתי סיבות:
1. קל יותר לחשב את ההתמרה עבור מספר בלוקים קטנים מאשר עבור בלוק אחד גדול.
2. ריכוז האנרגיה בתדרים הנמוכים נובע למעשה מהתלות הסטטיסטית בין רמות האפור בפיקסלים הנמצאים במרחק קצר זה מזה. עובר מרחקים הגדולים מ-20 פיקסלים רמות האפור חסרות קורלציה. אם נגדיל את גודל הבלוקים מעל סף מסוים נקבל שהתלות הסטטיסטית בין כל אמות האפור בתת התמונה קטן יותר וזה יביא לירידה בביצועי הדחיסה.

הערך המקובל כסטנדרטי הנו 8x8 כאשר ניתן גם לקודד בעזרת גודל בלוק משתנה התלוי בכמות הפרטים המקומית.

על כל תת תמונה מפעילים טרנספורום דיסקרטי. התמרה זו יכולה להיות ה DFT או כל התמרה מתאימה אחרת. ההתמרה המקובלת הנה DCT (Discrete Cosine Transform). היא אופטימאלית עבור מודל סטטיסטי המקובל לתמונות. יש עבורה אלגי' מבוסס FFT ולכן גם ניתנת לחישוב בזמן יעיל.

בשלב השני – הקוונטיזציה – נלקחת בחשבון התרומה הצפויה של כל אחד מרכיבי ההתמרה לאיכות התמונה. מתייחסים לעוות הכרוך בדחיסה ע"פ קריטריון השגיאה הריבועית הממוצעת.

ע"פ משפט פרסוול השגיאה הריבועית שווה לסכום השגיאות הריבעיות במקדמי ההתמרה.

$$MSE=\frac{1}{N^2}\sum\left(G(u,v)-\tilde{G}[u,v]\right)^2$$

כלומר הייצוג של כל רכיב בהתמרה ע"י מספר ביטים סופי יוצר שגיאה בערך המשוחזר של רכיב זה. על פי משפט פרסוול התרומה של שגיאה זו לעיוות הכללי אינה תלוי בשגיאת הייצוג של הרכיבים האחרים.

אם רוצים לייצג את הסדרה ע"י מספר ביטים נתון, כיצד נחלק את הביטים בין רכיבי ההתמרה כך שתתקבל שגיאת MSE נמוכה?

1. מוחקים חלק מרכיבי ההתמרה. מוחקים את הערכים הצפויים לקבל ערך נמוך ולכן מחיקתם אינה תורמת משמעותית לשגיאה (מבחינת MSE לא מבחינת הצופה). את שאר המקדמים מייצגים ע"י אורך מילה סופי וקבוע.
   בהתמרת DCT קריטריון זה מוביל למחיקת הרכיבים המתאימים לתדרים הגבוהים.
   מימוש מקובל הנו לסרוק לפי שיטית הזיג-זג ולקחת רק את-k הרכיבים הראשונים (המתאימים לתדרים נמוכים).

2. שיטה יעילה יותר הכלולה גם כן בפורמט ה JPEG היא להקצות מספר ביטים משתנה לייצוג כל מקדם בהתאם לשונות שלו (המכמתת את תחום ערכיו הצפוי). מספר זה נרשם מראש בטבלת קוונטיזציה.
3. שיטה אדפטיבית – טובה יותר. מחלק התמונה למספר מחלקות כך שבכל מחלקה נכללות תתי תמונות בעלות שונות דומה ובונה לכל מחלקה טבלת קוונטיזציה משלה.

קידוד בעזרת חלוקה לתתי בלוקים מקובל ביותר אך הוא סובל ממספר בעיות כגון מעברים נראים לעין בין בלוקים סמוכים.

<u>נוסחאות מתמטיות</u>

$$e^{i\cdot\alpha} = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha)$$

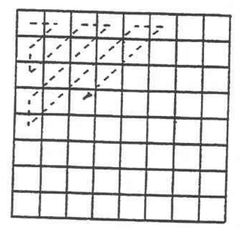
$$Sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$Cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(2x) = 1 - \sin^2(x)$$



סריקת זיג-זג