בעיית ה 3-צביעה. $3COL$.

הגדרה: גרף $G=(V,E)$ הינו k צביע, אם קיימת פונקציה $f:V\to\{1,\dots,k\}$ כך שלכל קשת $(u,v)\in E$, מתקיים $f(u)\neq f(v)$.

הבעיה $3COL$:

קלט: גרף פשוט ולא מכוון G.

פלט: האם G הוא 3 צביע.

$3COL=\{$<G> |צביע 3 G$\}$

טענה: $3COL$ היא NP-שלמה.

1. $3COL\in NP$

$R_{3COL}=\{(\langle G\rangle,f)\mid f:V\to\{1,2,3\},\ G$ היא צביעה חוקית ל $f\}$

- היחס R_{3COL} חסום פולינומית, כי הגודל של f הוא $O(V)$.
- היחס R_{3COL} ניתן לזיהוי פולינומי - בהינתן $(\langle G\rangle,f)$ כל מה שצריך לעשות זה לעבור על כל הקשתות כדי לבדוק האם f היא צביעה חוקית.
- $3COL=\{\langle G\rangle\mid$ צביע 3 הוא $G\}=\{\langle G\rangle\mid\exists f:G$ היא 3 צביעה חוקית ל $f\}=$ $\{\langle G\rangle\mid\exists f:(\langle G\rangle,f)\in R_{3COL}\}$

2. NP קושי: נראה $3SAT\le_P 3COL$

רוצים: φ הוא פסוק $3-CNF$ ספיק אם ורק אם $f(\varphi)=\langle G_\varphi\rangle$ כך ש G_φ הוא 3- צביע.

בהינתן פסוק $3-CNF$, φ נבנה גרף G_φ.

* לכל משתנה x_i, ניצור צומת שיסומן x_i וצומת שיסומן $\overline{x}_i$.

(זה יבטיח שבצביעה חוקית, ליטרל ושלילתו צבועים בשני צבעים שונים).

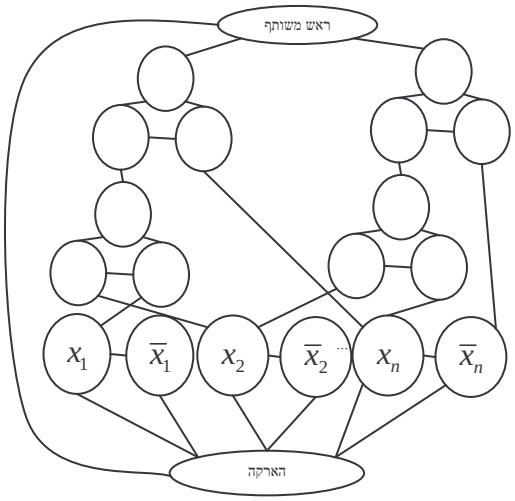
* נחבר את כל הצמתים של המשתנים לצומת אחד שיקרא "הארקה".

(בצביעה חוקית - צומת זה יקבל את הצבע השלישי ולמשתנים יישארו רק 2 צבעים).

* לכל פסוקית נבנה רכיב בסיסי. הצמתים התחתונים של כל רכיב בסיסי הם צמתים המתאימים לליטרלים שבנינו בהתחלה.

* את כל ראשי הפסוקיות מחברים לראש המשותף (מה שיבטיח שבצביעה חוקית הוא צבוע בצבע שונה מזה של ראשי הפסוקיות).

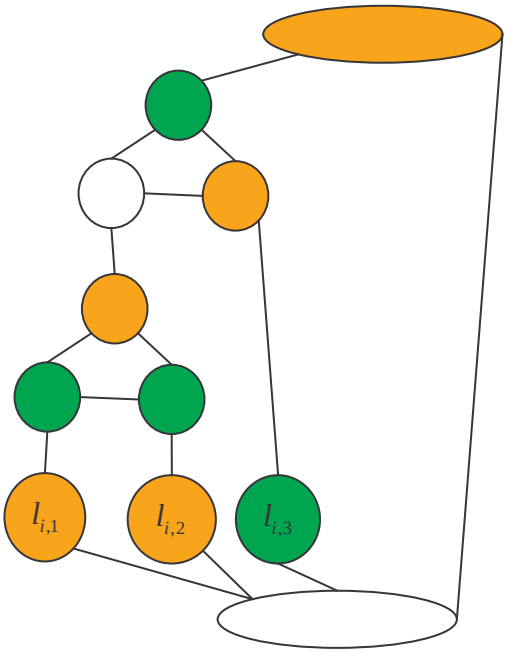
* נחבר בקשת בין ההארקה לראש המשותף.



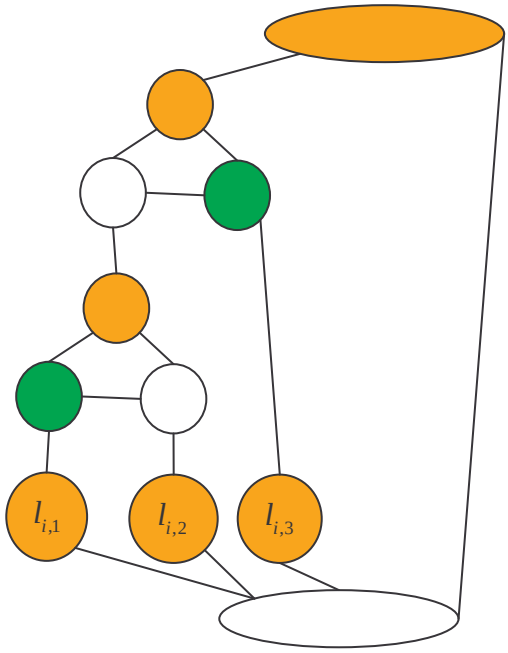
פולינומיות: הבניה פולינומית:
בניית המשתנים + שלילותיהם + הארקה + ראש משותף - לינארי במספר המשתנים.
עבור כל פסוקית יש מבנה בגודל קבוע, ולכן נדרש קבוע כפול מספר הפסוקיות.
סה"כ פולינומי.

תקפות:
כיוון ראשון: נתון שהפסוק φ הוא פסוק ספיק וצריך להוכיח שהגרף שהתקבל הוא 3 צביע.
נכנה את הצבעים T, F, N.
ניתן למצתי המשתנים צבעים T, F לפי ההשמה המספקת.
נבצע את ההארקה ב N.
נבצע את הפסוקיות בשיטת OR
נצבע את הראש המשותף ב F. (כל ראשי הפסוקיות יהיו צבועים ב T).

למה: אם אחד הצמתים התחתונים צבוע ב T, אזי ניתן לצבוע את ראש הפסוקית ב T.
<u>מסקנה:</u> כיוון שההשמה מספקת את φ, בכל פסוקית ישנו ליטרל שמקבל T, ולכן ניתן לצבוע את כל ראשי הפסוקיות ב T, ולכן הגרף הוא 3 צביע.



כיוון שני: G_φ הוא 3 צביע. צריך להוכיח ש φ הוא פסוק ספיק.
נקרא לצבע של ההארקה N. לצבע של הראש המשותף נקרא F. הצבע השלישי שיישאר יקרא T.
לפי הבניה אנחנו יודעים שכל הליטרלים מחוברים להארכה, ולכן צבועים רק ב T וב F.
לפי הבניה, כל ליטרל מחובר לשלילתו, ולכן הליטרל ושלילתו צבועים בצבעים שונים (אחד מהם צבוע ב T והשני צבוע ב F).
נציב למשתנים הצבועים ב T, את ערך האמת TRUE, ולצבועים בערך האמת את הערך FALSE.
- נבחין שההשמה חוקית. (כי כל ליטרל ושלילתו קיבלו ערכי אמת הפוכים).
- נראה שהשמה זו מספקת את הפסוק φ. כלומר, מספקת לפחות ליטרל אחד בכל פסוקית.
נניח בשלילה שלא, כלומר קיימת פסוקית ששלושת הליטרלים מקבלים FALSE.



מסקנה - הצביעה אינה חוקית, מכיוון שהראש המשותף צבוע ב F.
הסבר: הצמתים המחוברים לשני הליטרלים השמאליים חייבים להיצבע ב T ו N, ולכן זה שמעליה חייב להיצבע ב F. לכן גם הצמתים שמעל הליטרל השלילי והצומת שצבענו ב F, חייבים להיצבע ב N ו T, ולכן הראש המשותף יצבע ב F.