שפה L היא NP **קשה** אם לכל $L' \in NP$ מתקיים $L' \leq_p L$.
שפה L היא NP **שלמה** אם היא NP קשה וגם $L \in NP$.

טענה:
לכל שפה NP קשה L, אם $L \in P$ אז $P = NP$.
לכל שפה NP שלמה L, $L \in P$ אם ורק אם $P = NP$.

מסקנה:
אם $P \neq NP$ אז לכל שפה NP קשה ובפרט NP שלמה, איננה ב P.

טענה: אם L_1 היא NP קשה ו $L_1 \leq_p L_2$ אז L_2 היא NP קשה.

<u>בעיית המעגל ההמילטוני</u>
הגדרה: עבור גרף G, מעגל המילטוני הוא מעגל פשוט שעובר בכל צמתי הגרף (בכל צומת בדיוק פעם אחת מלבד צומת ההתחלה שבו עוברים פעמים).
(להבדיל ממעגל אויילר שעובר בכל קשת בדיוק פעם אחת).

בעיית המעגל ההמילטוני:
קלט: גרף G
הבעיה: האם ב G יש מעגל המילטוני.

יש שתי גרסאות לבעיה: (גרף מכוון וגרף לא מכוון).
$DHC = \{\langle G \rangle \mid$ ב G (גרף מכוון) יש מעגל המילטוני מכוון$\}$
$HC = \{\langle G \rangle \mid$ ב G (גרף לא מכוון) יש מעגל המילטוני לא מכוון$\}$

נראה ששפות אלו הן NP שלמות.
שייכות ל NP: (נראה עבור DHC)
נבנה מ"ט א"ד פולי' ל DHC: M_{DHC}.
M_{DHC} על קלט $\langle G \rangle$
תנחש פרומוטציה על הצמתים. תבדוק האם הקשתות הנחוצות על פי הפרמוטציה קיימות.
פולינומיות: ניחוש - פולינומי. בדיקה - גם פולינומית.

SAT היא NP שלמה (משפט קוק)
$SAT \leq_p 3SAT$ (ראינו בתרגול)
$3SAT \leq_p Vertex-Cover$ (ראינו בהרצאה)
$VC \leq_p DHC$ (דף עזר)
$DHC \leq_p HC$ (נראה עוד רגע)

משפט: HC היא שפה NP שלמה.
1. $HC \in NP$ בדומה ל DHC.
2. $DHC \leq_p HC$

רוצים: אם ב G יש מעגל המילטוני מכוון, אז $f(\langle G \rangle) = \langle G' \rangle$ כך ש ב G' יש מעגל המילטוני לא מכוון ואם ב G אין מעגל המילטוני מכוון, אז ב G' אין מעגל המילטוני מכוון.
הרדוקציה:
כל צומת יוחלף לשלושה צמתים - עותק 1, עותק 2, ועותק 0.

הקשת מצומת A לצומת B תוחלף בקשת מצומת 2A ל צומת 0B ובנוסף יהיו עוד שתי קשתות מ 0B ל 1B ומ 1B אל 2B.

ברור שהרדוקציה פולינומית.

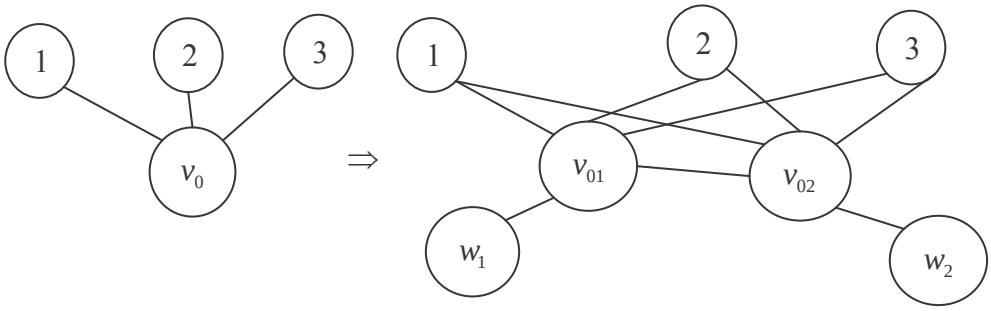
אם $\langle G \rangle \in DHC$ אז קיים מעגל המילטוני מכוון : $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n \to v_0$
המעגל שיתקבל ב G' הוא: $v_{00} - v_{01} - v_{02} - v_{10} - v_{11} - v_{12} - v_{20} \ldots - v_{n0} - v_{n1} - v_{n2} - v_{00}$

אם $\langle G' \rangle \in HC$ אז קיים בו מעגל המילטוני לא מכוון.
אם המעגל עובר ב v_{A0} אז הצומת הבא שהוא מגיע אליו הוא v_{A1} כי אחרת לא תהיה לו הזדמנות נוספת להיכנס ל v_{A1} בלי לעבור שוב ב v_{A0}.
אם המעגל עובר ב v_{A1} אז הוא חייב לעבור ממנו ל v_{A2} ע"פ הבניה.
אם המעגל עובר ב v_{A2} אז הוא חייב לעבור ממנו ל v_{B0} כלשהו ע"פ הבניה.
לכן ניתן להחליף את שלושת המעברים הנ"ל במעבר אחד מ v_A אל v_B ע"פ הבניה, ולקבל מעגל מכוון בגרף G.

בעיית המסלול ההמילטוני: (מסלול העובר בכל צומת פעם אחת בדיוק)
$HL = \{\langle G \rangle \mid$ ב G (גרף לא מכוון) קיים מסלול המילטוני לא מכוון$\}$
טענה: HL היא שפה NP שלמה.
1. HL היא שפה ב NP: מנחשים פרמוטציה ובודקים (כמו ב DHC)
2. HL היא שפה NP קשה. נראה רדוקציה פולינומית $HC \le_p HL$

רוצים: אם ב G יש מעגל המילטוני לא מכוון אז $f(\langle G \rangle) = \langle G' \rangle$ כך ש ב $\langle G' \rangle$ יש מסלול המילטוני לא מכוון (ורק אם ב G יש מעגל המילטוני לא מכוון).

הרדוקציה:
נבחר צומת אחד v_0 ונפצל אותו ל v_{01}, v_{02}. כל הקשתות שיצאו מ v_0 יצאו כעת משני העותקים.
בנוסף, נוסיף עוד זוג צמתים w_1, w_2 כאשר יש קשת מ w_1 אל v_{01} וקשת מ v_{01} אל v_{02} וקשת מ v_{02} אל w_2.



הרדוקציה פולינומית, כי הוספנו רק 3 צמתים, ולכל היותר הכפלנו את מספר הקשתות והוספנו עוד 3.
תקפות הרדוקציה:
אם ב G יש מעגל המילטוני $v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_n - v_0$ אז ב G' יש מסלול המילטוני:
$w_1 - v_{01} - v_1 - v_2 - \ldots - v_n - v_{02} - w_2$

אם ב G' יש מסלול המילטוני, אז הוא חייב להתחיל ב w_1 ולהסתיים ב w_2 (או להפך, אבל זה לא משנה כי הגרף לא מכוון).

לכן הצעד השני חייב להיות ב v_{01} והצעד האחד לפני האחרון חייב להיות ב v_{02} (כי אלו הצמתים היחידים שיכולים להתחבר ל w_1, w_2).

שאר הדרך היא בין v_{01} ל v_{02} דרך שאר הצמתים.

לכן המסלול הכולל הוא: $w_1 - v_{01} - v_1 - v_2 - \ldots - v_n - v_{02} - w_2$

נסלק מהגרף את w_1, w_2 ונאחד את v_{01}, v_{02} ונקבל חזרה את הגרף G, עם המעגל $v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_n - v_0$.