$L_{\geq 3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \geq 3\}$

$L_{=3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| = 3\}$ כל השפות הללו לא שייכות ל R

$L_{\leq 3} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \leq 3\}$

<u>משפט רייס</u>

תכונה של שפות ב RE היא תת קבוצה $S \subseteq RE$. זאת אומרת, S היא קבוצה של שפות.

תכונה $S \subseteq RE$ תיקרא טריוויאלית אם $S = \phi$ או $S = RE$.

לכל תכונה S של שפות ב RE נגדיר את השפה:

$L_S = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in S\}$ אוסף כל קידודי המכונות שהשפות שהן מקבלות שייכות ל S.

משפט רייס: אם S תכונה לא טריוויאלית של שפות ב RE אזי $L_S \notin R$.

הרחבה: אם $\phi \notin S$ אזי $L_S \notin RE$.

כיצד להשתמש במשפט רייס כדי להראות ששפה אינה ב R?

- נגדיר תכונה S לא טריווירלית.
- נראה כי קיימת שפה $L' \in RE$ וגם $L' \in S$ $(S \neq \phi)$
- נראה כי קיימת שפה $L'' \in RE$ וגם $L'' \notin S$ $(S \neq RE)$
- נראה כי $L_S = L$

דוגמאות:

$L_\varepsilon = \{\langle M \rangle \mid \varepsilon \in L(M)\}$

$S = \{L \in RE \mid \varepsilon \in L\}$ $\qquad L_S = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in S\} = \{\langle M \rangle \mid \varepsilon \in L(M)\}$

$\begin{cases} \Sigma^* \in S, RE \\ \phi \in RE \qquad \phi \notin S \end{cases}$ לא טריוויאלית

לכן לפי משפט רייס $L_S = L_\varepsilon \notin R$.

$L_\phi = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \phi\}$

נגדיר $S = \{\phi\}$ נקבל $L_S = L_\phi = \{\phi\}$

$\begin{cases} \phi \in S, RE \\ \Sigma^* \notin S \qquad \Sigma^* \in RE \end{cases}$ לא טריוויאלית

לכן לפי משפט רייס $L_S = L_\phi \notin R$

הערה: אם S טריוויאלית אז $L_S \in R$

$L_{S=\phi} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \phi\} = \phi \in R$

$L_{S=RE} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in RE\} = \Sigma^* \in R$

מתי לא להשתמש ברייס?

- כאשר התחביר לא מתאים:

$$L_{\cap} = \left\{ \langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle \mid \left| L(M_1) \cap L(M_2) \right| = 3 \right\}$$

אי אפשר להשתמש ברייס במקרה זה למרות שמתקיים ש $L_{\cap} \notin R$

נשתמש ברדוקציה: $L_{=3} \le L_{\cap}$

$$f(\langle M \rangle) = (\langle M \rangle, \langle M \rangle)$$

(אפשר להשתמש גם ב $f(\langle M \rangle) = (\langle M \rangle, \langle M_{all} \rangle)$ כאשר M_{all} היא המכונה שעוצרת ומקבלת הכל: $L(M_{all}) = \Sigma^*$)

$$L(M) = L(M) \cap L(M)$$

- כאשר התכונה היא תכונה של מכונה ולא של שפה:

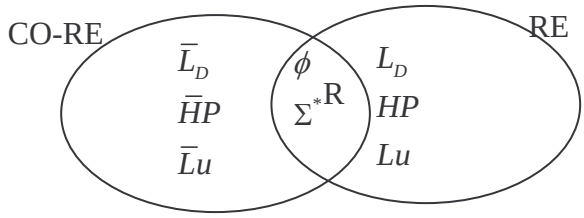
$$L_{\varepsilon H} = \{ \langle M \rangle \mid \varepsilon \text{ עוצרת על } M \}$$

לכל שפה ב RE שאינה מכילה את ε קיימת מכונת טיורינג שעוצרת ודוחה את ε, וקיימת מכונת טיורינג שלא עוצרת על ε.

- כאשר התכונה היא טריוויאלית:

$$L = \left\{ \langle M \rangle \mid L(M) = \overline{HP} \right\}$$

$\overline{HP} \notin RE$ ולכן לא קיימת מ"ט המקבלת אותה, ולכן $L = \phi$



$$L_{\ge 3} = \left\{ \langle M \rangle \mid \left| L(M) \ge 3 \right| \right\} \in RE / R$$

$$L_{=3} = \left\{ \langle M \rangle \mid \left| L(M) = 3 \right| \right\} \notin RE, CO_RE, R$$

$$L_{\le 3} = \left\{ \langle M \rangle \mid \left| L(M) \le 3 \right| \right\} \in CO_RE / R$$

נוכיח אי שייכות ל R ע"י רייס:

$$L_{\ge 3}$$

$$S = \left\{ L \in RE \mid \left| L \right| \ge 3 \right\}$$

$$L_S = L_{\ge 3}$$

$\Sigma^* \in S, RE$

$\phi \notin S \qquad \phi \in RE$

ולכן היא לא תכונה טריוויאלית ולכן ממשפט רייס $L_{\ge 3} \notin R$

$L_{\le 3}$

$S = \{L \in RE \mid |L| \le 3\}$

$L_S = L_{\le 3}$

$\phi \in S, RE$

$\Sigma^* \notin S \qquad \Sigma^* \in RE$

ולכן היא לא תכונה טריוויאלית ולכן ממשפט רייס $L_{\le 3} \notin R, RE$

$L_{=3}$

$S = \{L \in RE \mid |L| = 3\}$

$L_S = L_{=3}$

$\{0,1,\varepsilon\} \in S, RE$

$\phi \notin S \qquad \phi \in RE$

ולכן היא לא תכונה טריוויאלית ולכן ממשפט רייס $L_{=3} \notin R$

<u>טענה:</u> $L_{\ge 3} \in RE$

הוכחה: נתאר מ"ט $M_{\ge 3}$ המקבלת את $L_{\ge 3}$.

פעולת $M_{\ge 3}$ על קלט $\langle M \rangle$:

מריצה בהרצה מבוקרת את M על כל הקלטים מ Σ^* לפי סדר לקסיקוגרפי. במהלך הסימולציה, אם רואה ש M קיבלה 3 מילים שונות אז מקבלת.

הרצה מבוקרת = חלוקה לאיטרציות - באיטרציה ה i מבצעים לכל היותר i צעדי חישוב לכל מילה מבין i המילים הראשונות בסדר הלקסיקוגרפי.

<u>טענה:</u> $L_{\le 3} \in CO_RE$

הוכחה: $L_{\le 3} = \overline{L_{\ge 4}}$. ניתן להוכיח ש $L_{\ge 4} \in RE$ ולכן $L_{\le 3} = \overline{L_{\ge 4}} \in CO_RE$

<u>טענה:</u> $L_{=3} \notin RE$

נוכיח באמצעות רדוקציה: $\overline{HP} \le L_{=3}$

רוצים: $f(\langle M \rangle, x) = \langle M_x \rangle$ כך ש M לא עוצרת על x $\Leftrightarrow |L(M_x)| = 3$

M_x על קלט w תרוץ באופן הבא:

אם $w \in \{\varepsilon, 0, 1\}$ אז M_x מקבלת ואחרת מריצה M על x ואם M עוצרת על x אז M_x מקבלת.

אם M לא עוצרת על x אז $L(M_x) = \{0,1,\varepsilon\}$

ואחרת $L(M_x) = \Sigma^*$