<u>מטרת הקורס</u>

- מהו אלגוריתם?
- האם לכל בעיה קיים אלגוריתם הפותר אותה? חלק א' של הקורס
- איך מוכיחים שלא קיים אלגוריתם לפתרון בעיה?

- האם קיים אלגוריתם יעיל? מה זה יעיל?
- איך מוכיחים שלא קיים אלגוריתם יעיל? חלק ב' של הקורס

<u>א"ב, מילים ושפות</u>

א"ב: $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ - קבוצה סופית ולא ריקה, לדוגמה $\Sigma = \{0,1\}$.

אות – איבר בא"ב.

מילה / מחרוזת – רצף סופי של אותיות $x = \sigma_{i1}\sigma_{i2}...\sigma_{in}$.

המילה הריקה – ε.

אורך מילה – מספר האותיות במילה. $|x| = n$, $|\varepsilon| = 0$

שרשור מילים - $z = xy$, $z = x^k = \underbrace{xx...x}_{k-times}$

רישא / סיפא - $z = xy$

x – רישא של z.

y – סיפא של z.

Σ^n - כל המילים מעל הא"ב Σ אשר אורכן n. (יש $|\Sigma|^n$ כאלו).

Σ^* - אוסף כל המילים מעל א"ב Σ (קבוצה אינסופית בת מניה)

שפה – בהינתן א"ב Σ שפה היא תת קבוצה של Σ^*. בדרך כלל נסמן ב L.

שפה משלימה – בהינתן א"ב Σ ושפה L מעל Σ, השפה המשלימה היא $\overline{L} = L^c = \Sigma^* \setminus L$.

סדר לקסיקוגרפי – בהינתן א"ב Σ נסדר את אברי Σ^* באופן הבא:

1. לכל n מילים באורך n יבואו לפני מילים באורך $n+1$.
2. בכל אורך הסדר הוא אלפביתי.

דוגמה: $\Sigma = \{a,b,c\}$

מהו הסדר הלקסיקוגרפי? $\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab...$

טענה: יש יותר שפות ממחרוזות. נוכיח באמצעות הטענה הבאה:

טענה: א. מספר המחרוזות (מילים) מעל א"ב מסוים הוא קבוצה בת מניה.

ב. קבוצת השפות מעל א"ב מסוים אינה בת מניה.

הוכחה:

א. קבוצת כל המחרוזות מעל א"ב Σ היא בת מניה מכיוון שניתן לסדר אותה לפי הסדר הלקסיקוגרפי ולכן קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל ל- $\mathbb{N}$.

ב. נוכיח שקבוצת השפות אינה בת מניה (נשתמש בלכסון):

נניח בשלילה שקבוצת השפות כן בת מניה, ולכן קיימת לה פונקציה חד-חד ערכית ועל ל- $\mathbb{N}$.

נסמן את הסדר ב A.

$$A = \{A_0, A_1, A_2, ..., A_i, ...\}$$

נסמן את קבוצת כל המילים מעל Σ ב X לפי הסדר הלקסיקוגרפי:

$$X = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ...\}$$

נבנה שפה D שאיננה ב A (ומכאן שקבוצת כל השפות אינה בת מניה).

$D=\{x_i \in X \mid x_i \notin A_i, i \in \mathbb{N}\}$

D היא תת קבוצה של X ולכן היא שפה.

לכל i מתקיים $D \neq A_i$ כי אם $x_i \in A_i$ אז $x_i \notin D$ ואם $x_i \notin A_i$ אז $x_i \in D$.

ולכן קבוצת השפות איננה בת מניה (כי לא הצלחנו למצוא בספירה מקום לשפה D).

$\begin{pmatrix} 1 & & & ? \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ ? & & & 1 \end{pmatrix}$ מצאו עמודה שלא מופעה במטריצה: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

כל עמודה מייצגת שפה:

אם $x_i \in A_j$ אז $M_{i,j}=1$

אם $x_i \notin A_j$ אז $M_{i,j}=0$

אם נסתכל על האלכסון כל האיברים שיש בהם 0, מהווים את השפה D.

כל עמודה מייצגת שפה, מצאנו עמודה שלא קיימת במטריצה, ולכן קיימת שפה שלא מיוצגת במטריצה.

סריקת BFS על קבוצה בת מניה של שפות.

נתונות מספר בן מניה של שפות, בכל אחת מספר בן מניה של מילים.

השפות הן: $L_0, L_1, L_2, \ldots$

ידוע שהמילה x נמצאת באחת השפות, רוצים לדעת היכן.

הצעה נאיוויות: נחפש ב L_0, אח"כ ב L_1 וכן הלאה. לא טוב! אם $x \notin L_0$ ו L_o אינסופית אז נחפש לנצח!

הצעה נאיוית שניה: נבדוק מול מילה ראשונה בכל השפות, אח"כ מילה שניה בכל השפות וכו'. לא טוב! אם יש אינסוף שפות ו x לא המילה הראשונה באחת מהן, נמשיך לחפש לנצח!

פתרון: סריקת BFS.

בצעד 1: השווה עם המילה הראשונה ב L_0.

בצעד הK: השווה עם המילה ה K ב L_0, השווה עם המילה ה $K-1$ ב L_1 ... השווה עם המילה הראשונה ב L_{k-1}

מילה בשפה L_i שמספרה j תימצא בצעד ה $\max(i,j)$.

קבוצת השפות מעל א"ב אינה בת מניה.

א"ב $\Sigma=\{0,1\}$.

הסדר הוא: $\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots$

קבוצת המספרים הממשיים בקטע $[0,1)$ איננה בת מניה.

$\alpha = 0.1100101100\ldots$

נתאים את הביט ה i למילה ה i בסדר הלקסיקוגרפי של המילים בא"ב Σ.

$L_\alpha = \{w \mid$ דלוק α ב w הביט המתאים ל$\}$