<u>תזכורת:</u>

$P=\{L \mid L=L(M)$ כך ש M פולינומית **<u>דטרמיניסטית</u>** מ"ט קיימת$\}$

$NP=\{L \mid L=L(M)$ כך ש M פולינומית **<u>אי-דטרמיניסטית</u>** מ"ט קיימת$\}$

לא ידוע האם $P=NP$ - השאלה הפתוחה המרכזית במדעי המחשב.

נרצה לסדר את השפות ב NP על פי "קושי" - כאלו שאנחנו בטוחים שהן ב P, ומעליהן כאלו שאנחנו לא בטוחים האם הן ב P.

<u>הגדרה:</u> פונקציה f היא רדוקציה פולינומית מ L_1 אל L_2 אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $f \in POLY$ (זאת אומרת שהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומי).

ב. תקפות: $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$

אם קיימת רדוקציה כזו מ L_1 אל L_2 אז מסמנים $L_1 \le_P L_2$.

<u>טענה:</u> $L_1 \in P \Leftarrow \begin{cases} L_1 \le_p L_2 \\ L_2 \in P \end{cases}$

<u>הוכחה מקוצרת:</u> הבניה זהה לבניה שבמשפט הרדוקציה.
הנכונות זהה למה שהיה במשפט הרדוקציה.
ההבדל היחידי שיש הוא שצריך להוכיח שהמכונה שקיבלנו - M_1, רצה בזמן פולינומי.

M_f בצעד מספר 1 רצה זמן $p(|x|)$ ומייצרת פלט $f(x)$ שאורכו חסום גם כן ע"י $p(|x|)$.

M_2 בצעד מספר 2 רצה זמן $q(y) \le q(p(|x|))$ ולכן בסה"כ זמן פולינומי (הרכבת פולינומים נותנת פולינום).

<u>אבחנות:</u>

1. $L_1 \in PN \Leftarrow \begin{cases} L_1 \le_p L_2 \\ L_2 \in PN \end{cases}$

2. טרנזיטיביות: $(L_1 \le_P L_3) \Leftarrow (L_1 \le_P L_2) \wedge (L_2 \le_P L_3)$

<u>הגדרה:</u> שפה L נקראת NP-שלמה אם:

א. $L \in NP$

ב. לכל שפה $L_2 \in NP$ מתקיים: $L_2 \le_P L$

<u>טענה:</u> אם L היא NP-שלמה אז $P=NP \Leftrightarrow L \in P$

<u>הוכחה:</u>

כיוון $\Rightarrow$: אם $P=NP$, L בפרט שייכת ל NP, ולכן $L \in P$

כיוון $\Leftarrow$: נניח $L \in P$, צ"ל: $NP \subseteq P$. נבחר $L_2 \in NP$ כלשהי. $L_2 \in P \Leftarrow \begin{cases} L \in P \\ L_2 \le_P L \end{cases}$

<u>הגדרה:</u> L היא RE-שלמה אם:

א. $L \in RE$

ב. לכל $L_2 \in RE$ מתקיים $L_2 \le L$.

<u>טענה:</u> L_u היא RE-שלמה.

א. $L_u \in RE$ - ידוע.

ב. תהי $L \in RE$. צ"ל: $L \le L_u$

$$f(x) = \left(\langle M_L \rangle, x\right)$$

אם $x \in L$ אז M_L מקבלת את x ולכן $\left(\langle M_L \rangle, x\right) \in L_u$

אם $x \notin L$ אז M_L לא מקבלת את x ולכן $\left(\langle M_L \rangle, x\right) \notin L_u$

דוגמה:

$BH \triangleq \{\langle M \rangle, \langle x \rangle, 1^t \mid$ {למכונה הא"ד M קיים מסלול באורך $t \ge$ בו M מקבלת את x

<u>טענה:</u> $BH \in NPC$ (זאת אומרת שהיא NP-שלמה).

א. $BH \in NP$

צריך להראות מ"ט א"ד פולי' M_{BH} עבור BH.

M_{BH} תנחש מסלול באורך t, ותריץ את M על x במסלול זה. אם M מקבלת את x במסלול הנ"ל, אז M_{BH} תקבל. אחרת תדחה.

ב. לכל שפה $L \in NP$ צ"ל: $L \le_P BH$.

$$f_L(x) = \left(\langle M_L \rangle, x, 1^{p(|x|)}\right)$$

$L \in NP \Leftarrow$ קיימת מ"ט א"ד פולינומית M_L עבור השפה L.

p_L הוא פולינומים החוסם את זמן הריצה של M_L.

<u>דרכי הוכחה ל NP-שלמות.</u>

א. ישירה (ע"פ ההגדרה) - SAT

ב. עקיפה:

נראה ש $L \in NP$ ונבחר שפה $L_2 \in NPC$ ונראה רדוקציה $L_2 \le_P L$.

הוכחה:

א. $L \in NP$

ב. לכל שפה $L_7 \in NP$:

$$L_7 \overset{***}{\le_P} L \Leftarrow L_7 \underbrace{\le_P}_{**} L_2 \underbrace{\le_P}_{*} L$$

* - מתוך ההנחה.

** - כי L_2 היא NP-שלמה.

*** מטרנזיטיביות של $\le_P$.

<u>דוגמה:</u>

בעיית כיסוי בצמתים: VC - vertex cover

בהינתן גרף $G = (V, E)$ קבוצת צמתים $B \subseteq V$ נקראת כיסוי בצמתים אם לכל קשת בגרף $e = (a, b) \in E$ מתקיים $a \in B$ או $b \in B$.

גרף בצורה של כוכב - מספיק צומת אחד - הצומת המרכזי.

גרף מלא (יש קשת בין כל זוג צמתים) עם t צמתים - צריך $t-1$ צמתים ב B.

$VC = \{G, k \mid$ {יש כיסוי של G על ידי k צמתים

<u>טענה:</u> $VC \in NPC$ (ההוכחה בהמשך...)

א. $VC \in NP$:

1. תנחש קבוצה $B \subseteq V$ (למשל ע"י ניחוש של $|V|$ ביטים וצומת הוא ב B אם ניחשנו עבורו "1").
2. נבדוק ש $|B| \le k$ ושלכל קשת $e \in E$ לפחות אחד מצמתיה ב B. אם כן - תקבל, אחרת תדחה.

נכונות - מהגדרת הכיסוי.

סיבוכיות: $poly(|E|,|V|)$.

<u>דוגמה:</u> בעיית הקבוצה המייצגת HS - Hitting Set.

<u>נתונים:</u> קבוצה U ותתי קבוצה שלה $A_1, A_2, ..., A_m \subseteq U$ ומספר k.

האם קיימת קבוצה $R \subseteq U$ בגודל k כך שלכל i מתקיים: $R \cap A_i \ne \phi$.

<u>טענה:</u> $HS \in NPC$

כאשר HS היא אוסף כל השלשות של קבוצה U ותתי קבוצה שלה $A_1, A_2, ..., A_m \subseteq U$ ומספר k כך ש קיימת קבוצה $R \subseteq U$ בגודל k כך שלכל i מתקיים: $R \cap A_i \ne \phi$.

א. $HS \in NP$ (ננחש את R ונבדוק).

ב. $VC \in NPC$.

ג. $VC \le_P HS$

$$f\left(G=(V,E),k\right)=\left(V, A_1, A_2, ..., A_{|E|}, k\right)$$

כאשר לכל קשת $e=(a,b) \in E$ מתאימה הקבוצה $A_e = \{a,b\}$

$(G,k) \in VC \Leftrightarrow$ קיים כיסוי U בגודל k של הגרף $\Leftrightarrow$ קיימת קבוצה R מייצגת בגודל k לקבוצה $A_1, ..., A_{|E|}$ $\Leftrightarrow$ $f(G,k) \in HS$.

$(R=U)$.

f ניתנת לחישוב בזמן פולינומי.

לכן $HS \in NPC$.

<u>דוגמה:</u> כיסוי קבוצות SC - Set-Cover

<u>נתון:</u> קבוצה W, תתי קבוצות $C_1, C_2, ...C_m \subseteq W$ ומספר k.

השאלה היא האם קיימות k תתי קבוצות $C_{i1}, ..., C_{ik}$ כך ש $\bigcup_{y=1}^{k} C_{iy} = W$.

טענה: $SC \in NPC$

א. $SC \in NP$ (ננחש $i_1, ..., i_k$ ונבדוק).

ב. $VC \in NPC$

ג. $f(G,k)=\left(E, C_1, C_2, ..., C_{|V|}, k\right)$

כאשר לכל צומת $a \in V$ מתקיים $C_a = \{e \mid e$ אחד הצמתים של $a\}$.

$(G,k) \in VC \Leftrightarrow$ קיים כיסוי V בגודל k לגרף $\Leftrightarrow$ קיימות k קבוצות $C_{i1}, ..., C_{ik}$ כך ש

$$f(G,k) \in SC \Leftrightarrow \bigcup_{y=1}^{k} C_{iy} = E$$

f פולי כי היא עובדת בסיבוכיות $O(|V| \cdot |E|)$.

<u>דוגמה:</u> תכנות בשלמים $\{0,1\}$ $01IP$.

נתונה מערכת אי שוויונים עם מקדמים שלמים:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \geq b_1$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \geq b_m$$

האם קיים פתרון למערכת המשוואות שבו כל נעלם מקיים $x_i \in \{0,1\}$.

<u>טענה:</u> $01IP \in NPC$

א. $01IP \in NP$ - (ננחש את $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ונבדוק)

ב. $VC \in NPC$

ג. $VC \leq_P 01IP$

לכל קשת $e = (a,b) \in E$ נגדיר את אי השוויון המתאים: $X_a + X_b \geq 1$

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_{|V|} \leq k$$

כדי להתאים נכפיל במינוס אחד: $-X_1 - X_2 - \ldots - X_{|V|} \geq -k$