<u>תזכורת:</u>

$halting-problem = HP \triangleq \{\langle M\rangle, \langle x\rangle \mid x$ עוצרת על $M\}$

$Lu \triangleq \{\langle M\rangle, \langle x\rangle \mid x$ מקבלת את $M\}$ = השפה האוניברסאלית

$L_D \triangleq \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \in L(M)\}$ = שפת האלכסון

<u>רדוקציה:</u> $L_1 \le L_2$

אם קיימת פונקציה f <u>מלאה</u>, <u>ניתנת לחישוב</u> ומקיימת $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$ (תקפות)

<u>משפט הרדוקציה:</u> $L_1 \le L_2$

א. $L_1 \in R \setminus RE \setminus CO-RE \Leftarrow L_2 \in R \setminus RE \setminus CO-RE$

ב. $L_2 \notin R \setminus RE \setminus CO-RE \Leftarrow L_1 \notin R \setminus RE \setminus CO-RE$

<u>טענה:</u> $\bar{L}_D \notin R$ $\quad (\bar{L}_D \triangleq \{\langle M\rangle \mid \langle M\rangle \notin L(M)\})$

<u>מסקנה:</u> $L_D \notin R$

<u>הוכחת הטענה:</u> נניח בשלילה ש $\bar{L}_D \in R$ - לכן קיימת מ"ט שמכריעה את $\bar{L}_D$ - נקרא לה M_D.

כלומר: $L(MD) = \bar{L}_D$.

$$\langle M_D\rangle \notin \bar{L}_D \underbrace{\Leftrightarrow}_{**} \langle M_D\rangle \in L\langle M_D\rangle \underbrace{\Leftrightarrow}_{*} \langle M_D\rangle \in \bar{L}_D$$

* - הנחה על M_D

** - הגדרת L_D

<u>מסקנה א':</u> $\bar{L}_D \notin RE$

הוכחה 1: זהה להוכחה לגבי R.

הוכחה 2: ראינו ש $RE \cap CO-RE = R$. לכן $L \in R \Leftarrow L, \bar{L} \notin RE$

$(L \in RE \Leftrightarrow \bar{L} \in CO-RE)$

ראינו ש $L_D \notin R$ וראינו ש $L_D \in RE$ ולכן $\bar{L}_D \notin RE$ (כי אחרת $L_D \notin R$).

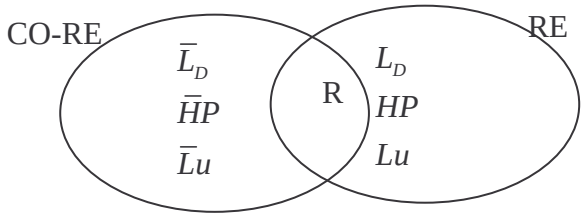
<u>מסקנה ב':</u> $HP, Lu \notin R$

<u>הוכחה</u>: ראינו ש $L_D \notin R$ וגם $\begin{matrix} L_D \le Lu \\ L_D \le HP \end{matrix}$ ולכן ע"פ משפט הרדוקציה $HP, Lu \notin R$.

<u>מסקנה ג':</u> $\bar{H}P, \bar{L}u \notin RE$

הוכחה 1: הוכחה 2 של מסקנה א'.

הוכחה 2: $\bar{L}_D \le \bar{L}_u \le \bar{H}P \Leftarrow L_D \le Lu \le HP$ ולכן $\bar{L}u, \bar{H}P \notin RE$.



דוגמה: $L_{\Sigma^*} \triangleq \{\langle M\rangle \mid L(M)=\Sigma^*\}$ כאשר $\Sigma=\{0,1\}$

טענה: $L_{\Sigma^*} \notin R$

הוכחה: מספיק שנוכיח: $HP \le L_{\Sigma^*}$ (לפי משפט הרדוקציה $\left.\begin{matrix} HP \notin R \\ HP \le L_{\Sigma^*}\end{matrix}\right\} \Rightarrow L_{\Sigma^*} \notin R$

$$f(\langle M\rangle,\langle x\rangle)=\langle M_x\rangle$$

התקפות המבוקשת: $\underbrace{(\langle M\rangle,\langle x\rangle)\in HP}_{*} \Leftrightarrow \underbrace{f(\langle M\rangle,\langle x\rangle)=\langle M_x\rangle \in L_{\Sigma^*}}_{**}$

* - M עוצרת על x

** - $L(M_x)=\Sigma^*$

M_x תקבל קלט w ותבצע:

תריץ את M על x ואם עצרה, תקבל. (תתעלם לחלוטין מהקלט שלה, w)

השיטה: מחיקת w מהסרט, וכתיבת x במקומו ואח"כ חזרה לתחילת הסרט והרצת M.

לכן f ניתנת לחישוב.

אם M לא עוצרת על x אז $L(M_x)=\phi$

אם M עוצרת על x אז $L(M_x)=\Sigma^*$

f היא הרדוקציה המבוקשת: מלאה, ניתנת לחישוב, תקפה.

תקפה - קיבלנו ב $L(M_x)$ את התקפות המבוקשת.

<u>דוגמה</u>: $L_{ALL}=\{\langle M\rangle \mid x$ עוצרת לכל $M\}$

<u>טענה</u>: $L_{ALL} \notin R$

<u>הוכחה</u>: בדיוק באמצעות אותה הרדוקציה מ HP. (M_x עוצרת לכל קלט אמ"מ M עוצרת על x)

<u>דוגמה</u>: $L_{EQ}=\{\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle \mid L(M_1)=L(M_2)\}$

<u>טענה</u>: $L_{EQ} \notin R$

<u>הוכחה</u>: $L_{\Sigma^*} \le L_{EQ}$ (הוכחנו קודם ש $L_{\Sigma^*} \notin R$ ולכן ע"פ משפט הרדוקציה $L_{EQ} \notin R$).

$$f(\langle M\rangle)=\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle$$

התקפות המבוקשת: $\underbrace{\langle M\rangle \in L_{\Sigma^*}}_{**} \Leftrightarrow \underbrace{\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle \in L_{EQ}}_{*}$

* - $L(M_1)=L(M_2)$

** - $L(M)=\Sigma^*$

$M_1=M$

$M_2=M_{\Sigma^*}$ - (המכונה שעוצרת מיד ב q_A ומתקיים עבורה $L(M_{\Sigma^*})=\Sigma^*$)

הגדרה: תכונה S של שפות RE היא תת קבוצת שפות $S \subseteq RE$.
תכונה נקראת טריויאלית אם $S \neq \phi$ או $S = RE$ (אחרת התכונה נקראת לא טריויאלית).

דוגמאות:
$$S_1 = \{L \in RE \mid \varepsilon \in L\}$$
$$S_2 = \{L \in RE \mid L \quad is \quad finite\}$$
$$S_3 = \{\Sigma^*\}$$

סימון: עבור תכונה S:
$L_S \triangleq \{\langle M \rangle \mid L(M) \in S\}$ - אוסף כל קידודי המכונות שהשפות שלהם שייכים ל S.
לדוגמה: $L_{S_3} = L_{\Sigma^*}$

אבחנה: אם S תכונה טריויאלית אז $L_S \in R$
<u>בדיקה</u>: אם $S = \phi$ אז $L_S = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \phi\} = \phi \in R$
אם $S = RE$ אז $L_S = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in RE\} = \Sigma^* \in R$

<u>משפט RICO</u>: תהי S תכונה לא טריויאלית של שפות RE $\Leftarrow L_S \notin R$
הוכחה:
מקרה א': $\phi \notin S$ - נוכיח $L_S \notin R$ באמצעות רדוקציה $HP \leq L_S$.
$$f(\langle M \rangle, \langle x \rangle) = \langle M_x \rangle$$
S איננה טריויאלית ולכן קיימת $L_0 \in S \subseteq RE$ ולכן קיימת מ"ט M_0 כך ש $L(M_0) = L_0$.
התקפות המבוקשת: $\underbrace{\langle M \rangle, \langle x \rangle \in HP}_{*} \Leftrightarrow \underbrace{\langle M_x \rangle \in L_S}_{**}$
* - M עוצרת על x
** - נבחר $\langle M_x \rangle = \langle M_0 \rangle$ אם M עוצרת על x ואחרת נבחר $\langle M_x \rangle$ כך ש $L(M_x) = \phi$.

M_x על קלט w:
הרץ את M על x ואח"כ הרץ אץ M_0 על w.

אם M לא עוצרת על x אז $L(M_x) = \phi$.
אם M כן עוצרת על x אז $L(M_x) = L(M_0) = L_0$.

תקפות:
אם $\langle M \rangle, \langle x \rangle \in HP \Leftarrow$ M עוצרת על x $\Leftarrow L(M_x) = L_0 \Leftarrow f(\langle M \rangle, \langle x \rangle) = \langle M_x \rangle \in L_s$
אם $\langle M \rangle, \langle x \rangle \notin HP \Leftarrow$ M לא עוצרת על x $\Leftarrow L(M_x) = \phi \notin S \Leftarrow f(\langle M \rangle, \langle x \rangle) = \langle M_x \rangle \notin S$

מקרה ב': $\phi \in S$: $\overline{S} = RE \setminus S$
S לא טריויאלית ולכן גם $\overline{S}$ לא טריויאלית.
$\phi \in S$ ולכן $\phi \notin S$
לכן $L_{\overline{S}} \notin R$ $\left(L_{\overline{S}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \overline{S}\} = \overline{\{\langle M \rangle \mid L(M) \in S\}} = \overline{L}_S\right)$
לכן $\overline{L}_S \notin R$ ולכן $L_S \notin R$.

דוגמאות:

1. $L_\varepsilon = \{\langle M \rangle \mid \varepsilon \in L(M)\}$

טענה: $L_\varepsilon \notin R$

נבחר תכונה: $S = \{L \in RE \mid \varepsilon \in L\}$

קיבלנו: $L_S = L_\varepsilon$

צ"ל: S איננה טריויאלית.

נראה שתי שפות ב RE - אחת ב S ואחת לא ב S.

$L_1 = \phi$

$L_2 = \{\varepsilon\}$

2. $L_{finite} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \quad is \quad finite\} \notin R$

$L_{even} = \{\langle M \rangle \mid |L(M)| \bmod 2 = 0\} \notin R$

$L = \{\langle M \rangle \mid L(M) \notin RE\} = \phi \in R$

סיכום:

הוכחת טענות מהצורה $L \notin R$

- הוכחה ישירה $(\bar{L}_D)$
- רדוקציות
- משפטים כלליים (RICE)