<u>תזכורת:</u>
<u>המטרה:</u> סיווג בעיות
מודל החישוב - מכונת טיורינג.
שקילות מודלים - יש מודלים אחרים בעלי אותו כוח חישוב. למשל מכונה בעלת K סרטים. למשל מכונת RAM.

התזה של צ'רצ' (*church*):
כל מודל כללי וסביר של חישוב שקול למודל מכונת טיורינג.
תזה = הנחת עבודה.
מודל כללי - חזק לפחות כמו מכונת טיורינג - (ניתן לסמלץ מ"ט במודל).
מודל סביר - מודל שכל רכיביו סופיים.

<u>מ"ט אוניברסאלית</u> - קידוד של $X = 415$ מ"ט למחרוזת בינארית.
הערות: הקידוד שרירותי. חשוב שניתן לפענח את הקידוד ולבצע אותו.
נתונה מכונת טיורינג $M = (Q, q_0, F, \Gamma, \Sigma, \not{b}, \delta)$
בה"כ: $Q = \{1, 2, 3, \ldots, |Q|\}$, $q_0 = 1$
$F = \{2, 3\}$
$\Sigma = \{1, 2, 3, \ldots, |\Sigma|\}$
$\Gamma = \{1, 2, 3, \ldots, |\Gamma|\}$
$\not{b} = |\Gamma|$
את הכיוונים נסמן בהתאמה: $(L, R, S) = (1, 2, 3)$

קידוד של מחרוזת $X = x_1 x_2, \ldots x_n$, $x_i \in \mathbb{N}$ למחרוזת בינארית, נסמן: $\langle X \rangle$: $1^{x_1} 0 1^{x_2} 1^{x_3} 0 \ldots 0 1^{x_n}$
דוגמה: $X = 415$. נקודד ל: $\langle X \rangle = 111101011111$

קידוד של פונקצית המעברים:
אם $\delta(q, a) = (p, b, d)$ אז המעבר יקודד ל $\langle qapbd \rangle = 1^q 0 1^a 0 1^p 0 1^b 0 1^d$
קידוד של מכונת טיורינג M: $1^{|Q|} 0 1^{|\Sigma|} 0 1^{|\Gamma|} 0 0 \langle \delta_1 \rangle 0 0 \langle \delta_2 \rangle 0 0 \ldots 0 0 \langle \delta_m \rangle 0 0 0$ יסומן ב $\langle M \rangle$
<u>הערות:</u>
1. אין חשיבות לסדר המעברים.
2. בהינתן מחרוזת, קל לפענח אותה (לקבל שביעיה).
3. לכל מכונה M יש קידוד מתאים (אבל לא לכל קידוד יש מכונה מתאימה).

קונבנציה שרירותית: כל מחרוזת בינארית שאין לה פענוח, נחליט שהיא מתארת את המכונה שלכל קלט עוברת למצב סופי מס' 3 ונעצרת. נקרא לה מכונת $M - STAM$ (סתם מכונה).
כעת לכל מחרוזת בינארית יש פרשנות.

קידוד של קונפיגורציה:
בהינתן קונפיגורציה $c = (\alpha, q, i)$ נקודד אותה למחרוזת בינארית שנסמן אותה ב $\langle c \rangle$,
$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1} \rangle 001^q 0 \langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \ldots, \alpha_m \rangle$

דוגמה, הקונפיגורציה התחילית של M על x . המצב ההתחלתי הוא $c_0 = (x, 1, 1)$
$\langle c_0 \rangle = 0010 \langle x \rangle$

נגדיר $NEXT\left(\langle M\rangle,\langle c\rangle\right)$:

אם c קונפיגורציה חוקית עבור M, ואיננה סופית, ו c' הקונפיגורציה העוקבת אז
$NEXT\left(\langle M\rangle,\langle c\rangle\right)=\langle c'\rangle$

אחרת: לא מוגדר $=NEXT\left(\langle M\rangle,\langle c\rangle\right)$

(קונפיגורציה לא חוקית היא למשל אם יש ב c אותיות שאינן מוכרות ב M)

<u>טענה:</u> $NEXT\left(\langle M\rangle,\langle c\rangle\right)$ היא פונקציה ניתנת חישוב. כלומר, קיימת מ"ט M_{NEXT} שמקבלת כקלט $\langle M\rangle,\langle c\rangle$ ומחשבת $NEXT\left(\langle M\rangle,\langle c\rangle\right)$.

<u>הוכחה:</u>

$\langle M\rangle\langle c\rangle$ - בסוף ה $\langle M\rangle$ יהיו 000.

1. M_{NEXT} תבדוק את חוקיות הקלט שלה. אם הקלט איננו חוקי, אסור למכונה לעצור. לכן M_{NEXT} תיכנס ללולאה אינסופית.
2. ע"י חיפוש המחרוזת 00 ב $\langle c\rangle$ מוצאים את $001^q01^{\alpha_i}0$ שזו האינפורמציה הנחוצה.
3. נחפש את המחרוזת $001^q01^{\alpha_i}0$ ב $\langle M\rangle$ וכשנמצא אותו, מימינו יהיה יופיע $1^p01^b01^d00$ שמתאר מה השינויים המבוקשים.
4. נפעיל את השינויים הנ"ל על $\langle c\rangle$ ונקבל את $\langle c'\rangle$ אותו נוציא לפלט.

מ"ט אוניברסאלית מקבלת תוכנית להרצה M, וקלט X, ומוציא כפלט את הפלט של M על X.
הגדרה: הפונקציה האוניברסאלית $U\left(\langle M\rangle,\langle X\rangle\right)$:

אם X חוקי עבור M אז הפלט הוא $\langle f_M(X)\rangle$ ואחרת הפלט לא מוגדר.

טענה: U היא פונקציה ניתנת לחישוב - יש מכונת טיורינג שמחשבת אותה. מ"ט המחשבת את U נקראת מ"ט אוניברסאלית.
הוכחה: נתאר M_U המחשבת את U. על קלט $\langle M\rangle\langle X\rangle$ המכונה M_U תעבוד באופן הבא:

1. נייצר את הקידוד של הקונפיגורציה התחילית $\langle c_0\rangle$ מתוך $\langle X\rangle$.
2. כל עוד c איננה סופית, חשב את $\langle c\rangle\leftarrow NEXT\left(\langle M\rangle,\langle c\rangle\right)$
3. מתוך $\langle c\rangle$ הסופית, הוצא את הפלט.

מתקיים (נכונות): בצעד מספר 2 מיוצרת סדרת הקונפיגורציות המהווה את החישוב של M על X.
בפרט, אם M עוצרת על X אז הפלט של M_U הוא אכן הפלט של M על X מקודד.
אם M לא עוצרת על X גם M_U לא תעצור, כנדרש.

<u>בעיות הכרעה:</u> $ACCEPT=YES\,/\,NO=REJECT$

<u>תזכורת:</u> $\Sigma=\{0,1\}$

שפה L מעל הא"ב Σ היא אוסף (סופי או אינסופי) של מחרוזות מתוך Σ^* $\left(L\subseteq\Sigma^*\right)$

$\overline{L}=\Sigma^*\setminus L$

<u>הגדרה:</u> מ"ט לזיהוי שפות היא מכונת טיורינג רגילה בעלת שני מצבים סופיים:

$q_A = Accept \qquad \langle q_A \rangle = 1^2 0$

$q_R = Reject \qquad \langle q_R \rangle = 1^3 0$

נאמר שמ"ט כנ"ל מקבלת את הקלט X אם M עוצרת על X ב q_A.

נאמר שמ"ט כנ"ל דוחה את הקלט X אם M עוצרת על X ב q_R.

בהינתן מ"ט M כנ"ל מגדירים $L(M)$ להיות: $\{x \mid x$ מקבלת את $M\}$

נאמר ש M מכריעה את L אם היא עוצרת לכל קלט וגם $L(M) = L$

דוגמאות (שפות שניתנות להכרעה)

1. Σ^* (מכונת טיורינג שמיד עוברת ל q_A מכריעה את Σ^*).
2. ϕ (מכונת טיורינג שמיד עוברת ל q_R מכריעה את ϕ).
3. כל שפה רגולארית ובפרט כל שפה סופית. (אוטומט הוא מקרה פרטי של מ"ט שעוצרת תמיד, כשנגמר הקלט - הוא בעצם מ"ט שתמיד הולכת ימינה).
4. אוסף כל הגרפים הקשירים.

<u>מחלקה של שפות:</u>

R - אוסף כל השפות שניתנות להכרעה.

RE - אוסף כל השפות שיש עבורן מכונת טיורינג - קיימת מ"ט M כך ש $L(M) = L$. המכונה לא בהכרח עוצרת.

$CO-RE$ - אוסף כל השפות L כך ש $\overline{L} \in RE$. זאת אומרת שיש מ"ט שעוצרת עבור כל מילה שאיננה בשפה L ודוחה אותה. לא עוצרת בהכרח עבור מילים שכן בשפה אבל אם עוצרת, אז מקבלת.

תכונות בסיסיות של R, RE:

1. $R \subseteq RE$

$R \subseteq CO-RE$

$\Rightarrow R \subseteq RE \cap CO-RE$

2. R סגורה למשלים: $\overline{L} \in R \Leftarrow L \in R$.

<u>הוכחה</u>: בהינתן מ"ט M שעוצרת תמיד ומכריעה את L, אז מ"ט $\overline{M}$ המתקבלת מהיפוך המצבים q_A, q_R גם היא עוצרת תמיד ומכריעה את $\overline{L}$.

האם RE סגורה למשלים? לא!

3. R סגורה לאיחוד: $L_1, L_2 \in R \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in R$ (נכון גם לגבי שרשור וחיתוך).

<u>הוכחה</u>: תהינה M_1, M_2 מ"ט המכריעות את L_1, L_2 בהתאמה. נבנה M עבור האיחוד:

M שומרת עותק נוסף של הקלט X. היא מריצה את M_1 על X. אם M_1 מקבלת את X אז M תעצור ותקבל את X. אחרת היא תריץ את M_2 על X. אם M_2 מקבלת את X אז M תעצור ותקבל את X. אחרת היא תדחה את X.

4. האם RE סגורה לאיחוד? כן!

<u>הוכחה</u>: תהינה M_1, M_2 מכונות המקבלות (לא בהכרח עוצרות) את L_1, L_2 בהתאמה.

נריץ במקביל (איך???) את M_1 על X ואת M_2 על X. אם אחת מקבלת, נקבל את X. אם אחת דוחה נמשיך לבדוק מה עושה השניה.

אם $X \in M_1 \cup M_2$ אז לפחות אחת מהמכונות תעצור על X ולכן גם M תעצור.