מבוא: קורס תיאורטי
1. אילו בעיות ניתן לפתור ע"י מחשב?
2. אילו בעיות ניתן לפתור ביעילות ע"י מחשב?
הדגש: תוצאות אי-אפשרות.

חלק א': "ניתן לפתור" = קיימת תוכנית מחשב שעוצרת לכל קלט עם הפלט המבוקש.

דוגמאות: הבעיות הבאות אינן ניתנות לפתרון:
- בהינתן שתי תוכניות מחשב, לבדוק האם הן שקולות.
- בהינתן תוכנית מחשב, למצוא את התוכנית הקצרה ביותר השקולה לה.
- בעיית העצירה: נתונה תוכנית המחשב M והקלט X – האם M עוצרת על X?
- נתונה תוכנית מחשב – האם היא עוצרת לכל קלט?

הוכחה (לא פורמאלית) עבור בעיית העצירה:
נניח בשלילה שקיימת תוכנית $MAGIC$ המקבלת כקלט שני ארגומנטים $MAGIC(M,X)$
M – מחרוזת שמתארת התוכנית.
X – מחרוזת המתארת את הקלט של התוכנית.
- $MAGIC$ תמיד עוצרת.
- אם $M(X)$ עוצרת אז הפלט של $MAGIC$ הוא YES.
- אם $M(X)$ לא עוצרת אז הפלט של $MAGIC$ הוא NO.
(- אם M לא חוקית אז הפלט של $MAGIC$ הוא $FAIL$ - נתעלם מזה בהוכחה)

נתאר אלגוריתם חדש $BUG(W)$ שמבצע:

```
if (MAGIC (W,W) == YES)
        then infinte loop (לולאה אין סופית)
else
        stop
```

תכונות BUG:
- BUG היא תוכנית חוקית בהינתן $MAGIC$.
- האם $BUG(BUG)$ עוצרת או לא?

אם $BUG(BUG)$ עוצרת אז $MAGIC(BUG,BUG)$ החזירה NO. ע"פ הגדרת $MAGIC$ זה אומר ש $BUG(BUG)$ לא עוצרת. סתירה!

אם $BUG(BUG)$ לא עוצרת אז $MAGIC(BUG,BUG)$ החזירה YES. ע"פ הגדרת $MAGIC$ זה אומר ש $BUG(BUG)$ כן עוצרת. סתירה!

לכן לא יתכן שקיימת תוכנית $MAGIC$ כנ"ל.

מהלך חלק א' של הקורס:
- הגדרת מודל החישוב / מה זה מחשב
- פורמאליות
- פשטות
- סיווג בעיות: בעיות פתירות ובעיות לא פתירות.

מהלך חלק ב' של הקורס:
- סיווג בעיות פתירות: פתירות ביעילות ואינן פתירות ביעילות.

<u>דוגמאות:</u> הבעיות הבאות "אינן ניתנות לפתרון יעיל"(?)
<u>קלט:</u> n משימות שצריך לבצע. כל אחת דורשת יחידת זמן אחת.
אילוצים: זוגות של משימות שלא ניתן לבצע בו זמנית.
<u>בעיית הצביעה:</u> כמה זמן נחוץ לביצוע חוקי של כל המשימות?
<u>בעיית 3-צביעה:</u> האם ניתן לסיים את הביצוע תוך 3 יחידות זמן? ניתן לפתור בזמן 3^n
<u>בעיית הקבוצה הבלתי תלויה:</u> מציאת קבוצה גדולה ביותר של משימות שניתנות לביצוע בו-זמנית.

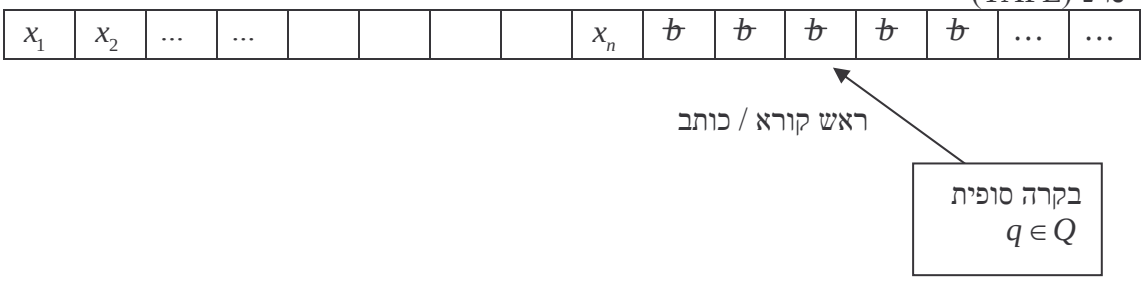
הוכחה נסיבתית שאין אלגוריתם יעיל לבעיות האלה.

לא ידוע אלגוריתם לאף בעיה בקבוצה הזאת וכולן שקולות.

<u>מהלך חלק ב' של הקורס:</u>
- נגדיר "יעילות"
- סיווג של בעיות
- איך מתמודדים עם בעיות שאין להן פתרון יעיל

<u>מודל החישוב:</u> מכונת טיורינג

סרט (TAPE)



<u>הגדרה:</u> מכונת טיורינג היא שביעיה $M = (Q, q_0, F, \Gamma, \Sigma, \not b, \delta)$
Q קבוצה סופית שאבריה נקראים מצבים.
$q_0 \in Q$ נקרא <u>מצב תחילי</u>.
$F \subseteq Q$ קבוצה שנקראת <u>המצבים הסופיים</u>.
Γ קבוצה סופית שנקראת <u>א"ב עבודה</u> שמתארת מה יכול לכתוב הראש על תאי הסרט.
$\Sigma \subset \Gamma$ נקראת <u>א"ב הקלט</u>.
$\not b \in \Gamma \setminus \Sigma$ נקרא <u>רווח</u> (בלנק)
δ נקראת <u>פונקצית המעברים</u> $\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$

<u>הגדרה:</u> קונפיגורציה (תיאור מצב רגעי) של מ"ט (מכונת טיורינג) M:
שלשה: $C \in \Gamma^* \times Q \times \mathbb{N}$
אם הקונפיגורציה הנוכחית היא $c = (\alpha, q, i)$ פירושו שהמכונה נמצאת q, הראש שלה במקום ה i
ותוכן הסרט הוא $\alpha \not b \not b \not b ...$
הקונפיגורציה התחילית של מ"ט M על קלט x הינה: $c_0 = (x, q_0, 1)$
קונפ' (α, q, i) נקראת קונפיגורציה סופית אם $q \in F$.

<u>הגדרה:</u> צעד חישוב של M:

אם הקונפ' הנוכחית של M הינה (α, q, i) ואם $a = \alpha_i$ ואם $\delta(q,a) = (p,b,d)$

1. אז מתבצע: $\alpha_i \leftarrow b$
2. הבקרה עוברת למצב p
3. אם $d = S$ הראש לא זז.

אם $d = R$ הראש עובר צעד אחד ימינה.

אם $d = L$ הראש עובר צעד אחד שמאלה. (אם $i = 1$ הראש נשאר באותו המקום)

<u>הערות:</u>

1. לצורך תיאור הקונפ' הנוכחית, מספיק שהאורך של α יהיה:

max{ התא הימני ביותר בסרט בו ביקרנו עד כה, אורך הקלט }

2. לכל קונפ' לא סופית יש קונפ' עוקבת יחידה

<u>דוגמה:</u> קלט: $w \in \{0,1\}^*$

"פלט": $0w$

במעבר אחד, בצעד ה i נכתוב לתוך התא את מה שראינו בתא ה $i-1$ ונזכור את האות הנוכחית לכתיבה בתא ה $i+1$.

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$F = \{q_2\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

$\Gamma = \{0,1,\not{b}\}$

Γ / $Q \setminus F$	0	1	$\not{b}$
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 0, R)$
q_1	$(q_0, 1, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, 1, R)$

$w = 1100$

$c_0 = (1100, q_0, 1)$

$c_1 = (0100, q_1, 2)$

$c_2 = (0110, q_1, 3)$

$c_3 = (0110, q_0, 4)$

$c_4 = (0110, q_0, 5)$

$c_5 = (01100, q_2, 6)$