<u>תחשיב היחסים</u>

מילון: קבועים I,C

סימני יחס: $=,>,R,Q$

סימני פונקציות: $f,g,k,-$

שמות עצם:

בסיס: כל משתנה או קבוע

סגור: הפעלת הפונקציות על שמות העצם: $f(I,C)$, $g(f(I,C))$, $+(I,C)$

(בדרך כלל נרשום $I+C$ במקום $+(I,C)$)

נוסחאות:

אטומיות: הפעלת סימן יחס על שמות עצם:

$R(I,g(C))$ (האם I ו $g(C)$ שייכים לרלציה R)

סגור: הפעלת קשרים לוגיים על נוסחאות קיימות: $\wedge,\vee,\neg,\rightarrow$

עבור נוסחה α ומשתנה x ניתן להשתמש ב: $\beta_1=\forall x\alpha$, $\beta_2=\exists x\alpha$

$\forall x\forall y\forall z\, R(x,y)\wedge R(y,z)\rightarrow R(x,z)$ נוסחת הטרנזיטיביות.

$$\alpha(x)=\forall y\left[(x \bmod y)=0\rightarrow\left((x=y)\vee(y=1)\right)\right]$$

(הנוסחה מחזירה $True$ לכל x ראשוני ו $False$ בכל מקרה אחר)

מופע של משתנה – מקום בו מופיע המשתנה ושאינו צמוד לכמת $\exists,\forall$.

לדוגמה, $\forall xR(\underbrace{x})$

מופע חופשי: מופע של משתנה שאיננו נמצא תחת ההשפעה של כמת $\exists,\forall$.

$$\alpha(x,y)=\left(\underbrace{y}_{0}=\underbrace{x}_{1}\right)\rightarrow\left(\exists\underbrace{y}_{2}\left(\underbrace{y}_{3}>\underbrace{x}_{4}\right)\right)$$

0,1,4 – מופע חופשי

2- לא מופע

3- מופע לא חופשי

פסוק – נוסחה ללא משתנים חופשיים

מבנה: קבוצת תחום עבור המשתנים.

פירוש לסימני היחס.

פירוש לסימני הפונקציות.

פירוש לסימני הקבוע.

מבנה סטנדרטי: $\mathbb{Z},\mathbb{N},(0,1,...,100)$

השמה: פונקציה מקבוצת המשתנים אל קבוצת התחום.

S:{משתנים}→{קבוצת התחום}

S^* - הרחבה אל כל שמות העצם.

S:{שמות עצם}→{קבוצת התחום}

$$S^*(x)=S(x)$$
$$S^*(y)=S(y)$$
$$S^*(x+y)=S(x)+S(y)$$

עבור נוסחה α, מבנה m והשמה S, אם α נכונה ב S,m אז נסמן $m,S\models\alpha$ ואחרת נסמן $m,S\not\models\alpha$.

לדוגמה:

m תחום המשתנים הוא שלמים אי שליליים $(\mathbb{N})$

S: $S(x)=2$, $S(y)=2$

$m,S\models(x=y)$

$m,S\models\forall x[x>5\rightarrow x>4]$ (במקרה זה אין משמעות להשמה כי זהו פסוק)

$m,S\models\exists x[(x=5)\rightarrow(x=4)]$

$m,S\models\forall x\forall y[x\le y\vee x\ge y]$

$m,S\not\models\forall x((x<y)\wedge(x \bmod y=0))$ (למשל עבור $x=1$)

$m,S\models\exists x[(x<y)\wedge(x \bmod y=0)]$ (למשל עבור $x=0$)

אמת לוגית: נוסחה α הינה אמת לוגית אם לכל מבנה m ולכל השמה S מתקיים: $m,S\models\alpha$.

נסמן: $\models\alpha$

לדוגמה: $\forall x(R(x,y)\vee\neg R(x,y))$

מערכת הוכחה: אוסף של כללים ליצירת טענות.

אם ניתן ליצור את α על ידי מערכת הוכחה D אז נאמר ש α יכיחה ב D ונסמן: $\vdash_D\alpha$

אחרת α איננה יכיחה ב D ונסמן: $\nvdash_D\alpha$.

מערכת הוכחה **נאותה** היא מערכת בה כל טענה יכיחה הינה נכונה. $\vdash_D\alpha\rightarrow\models\alpha$

מערכת הוכחה **שלמה** היא מערכת בה ניתן להוכיח כל טענה נכונה. $\models\alpha\rightarrow\vdash_D\alpha$

מערכת שלא ניתן להוכיח בה כלום היא נאותה.

מערכת שניתן להוכיח בה הכל היא מערכת שלמה.