<u>פתרונות לבעיית SAT</u>

כאשר רוצים להפריך AGp , מנסים למצוא מסלול המספק את הנוסחה:

$$I(s_0) \wedge R(s_0,s_1) \wedge R(s_1,s_2) \wedge \ldots \wedge R(s_{k-1},s_k) \wedge$$
$$\neg p(s_0) \vee \neg p(s_1) \vee \neg p(s_2) \vee \ldots \vee \neg p(s_k)$$

SAT היא בעיה NP-שלמה.

ידוע אלגוריתם אקספוננציאלי. <u>מניחים</u> שאין לה פתרון פולינומיאלי.

בעיית SAT:

נתון פסוק CNF. רוצים לדעת האם יש לפסוק השמה מספקת.

משתנה בוליאני: משתנה שיכול לקבל 0 או 1.

ליטרל: x , $\overline{x}$ (משתנה בוליאני או שלילה שלו)

פסוקית: $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$ (רשימה של ליטרלים עם סימן $\vee$ ביניהם)

פסוק CNF: $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\ldots \vee \ldots \vee) \wedge (\quad) \ldots$ (רשימה של פסוקיות עם $\wedge$ ביניהן)

השמה נותנת ערכים למשתנים של הנוסחה - T או F, (1 או 0).

דוגמה להשמה: $A = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, \ldots\}$

השמה מלאה נותנת ערך **לכל** המשתנים.

השמה חלקית נותנת ערך **לחלק** מהמשתנים. למשל: $A = \{x_7 = 0, x_2 = 0\}$.

נניח שהפסוק שלנו הוא: $(x_1 \vee x_5 \vee \neg x_7) \wedge (x_7 \vee \neg x_2)$

החלטה: נניח שהחלטנו ש $x_7 = 0$

נקבל: $\underbrace{(x_1 \vee x_5 \vee \neg x_7)}_{T} \wedge \underbrace{(\cancel{x_7} \vee \neg x_2)}_{\neg x_2}$ לכן יש גרירה: $\neg x_2 = 1$ ולכן $x_2 = 0$.

בהינתן השמה חלקית ונוסחה פסוקית (פסוק CNF), פסוקית יחידה היא פסוקית שרק לליטרל אחד בה אין ערך בהשמה החלקית.

לדוגמה: ההשמה $A = \{x_7 = 0\}$ והפסוקית $(x_7 \vee \neg x_2)$. זוהי פסוקית יחידה כי רק ל $\neg x_2$ אין ערך אמת בהשמה החלקית A .

<u>דוגמה</u>: נתון פסוק CNF: $\varphi = (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee d)$

נבצע החלטה מס' 1: $b = 1$.

נשאר לנו: $\varphi_{(b=1)} = (c) \wedge (\neg a \vee \neg d) \wedge (\cancel{T}) \wedge (\neg a \vee d)$

מסקנה / גרירה : אם $b = 1$ אז $c = 1$.

נשאר לנו: $\varphi_{(b=1,c=1)} = (\neg a \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee d)$

נבצע החלטה מס' 2: $a = 1$ (החלטה לא כל כך מוצלחת - נראה בהמשך)

נקבל: $\varphi_{(a=1,b=1,c=1)} = (\neg d) \wedge (d)$

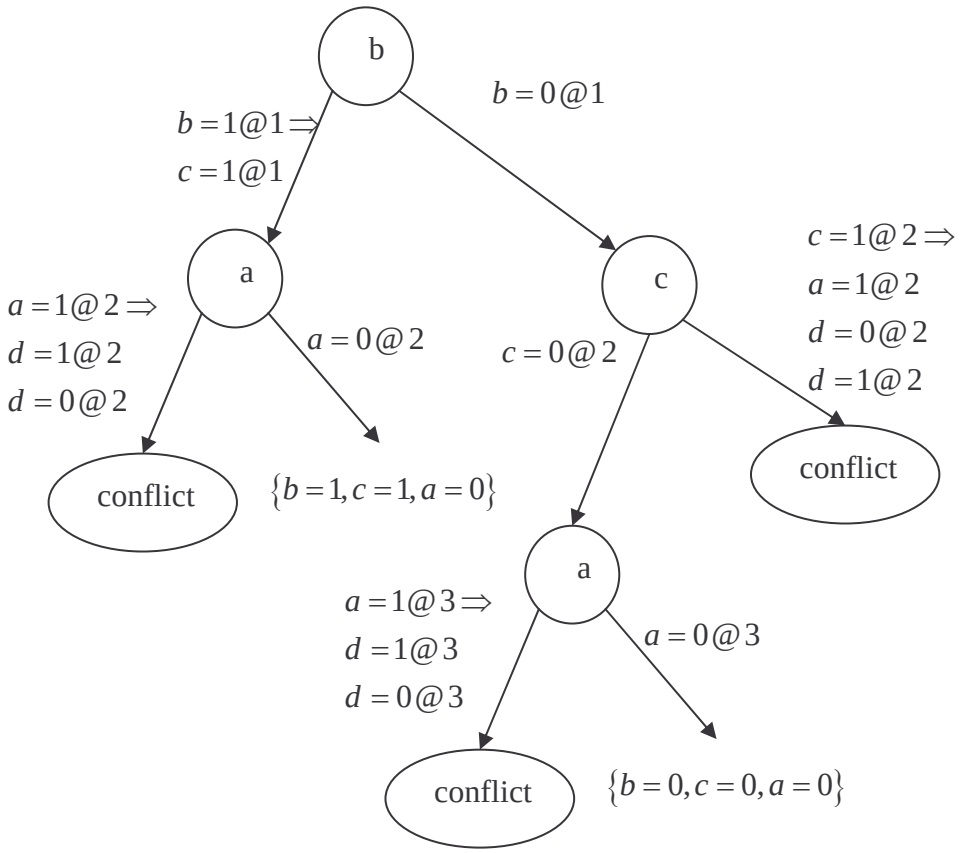
וכאן יש כמובן קונפליקט. כי יש כאן שתי גרירות סותרות: $d = 0$ וגם $d = 1$.

לכן נבטל את החלטה 2, ונבצע החלטה חדשה: $a = 0$:

נקבל: $\varphi_{(a=0,b=1,c=1)} = (T) \wedge (T) = T$ ולכן מצאנו השמה מספקת.

<u>עץ החלטה:</u>
רמת החלטה decision level: מתחילה מ-1 ועולה בכל שלב.
סימון: $x = v@d$ פירושו: המשתנה x קיבל ערך $v \in \{0,1\}$ ברמת החלטה d.

בדוגמה הקודמת: (עם תוספות לאפשרויות להשמות אחרות המספקות או לא מספקות את הפסוק):



<u>אלגוריתם בסיסי לפתרון בעיית SAT. Davis Putmam (DPLL), 1960, 1962.</u>
מתחילים מהשמה חלקית ריקה - שלא נותנת ערך לאף משתנה.
החלטה: 1. מרחיבים את ההשמה החלקית הנתונה ע"י החלטה (משתנה + ערך).
הסקה: 2. מרחיבים השמה עם כל הגרירות שנובעות מההחלטה.
ניתוח: 3. אם התקבל קונפליקט (פסוקית קיבלה ערך F) בהשמה הנוכחית אז מבצעים נסיגה, שבה מבטלים חלק מההחלטות, וחוזרים ל 1.

נסיגה כרונולוגית: מבטלים החלטות עד ההחלטה האחרונה שבה המשתנה עדין לא קיבל את הערך השני, והופכים את הערך.

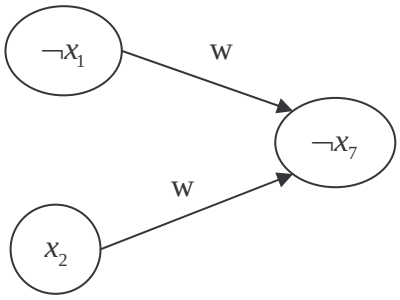
האלגוריתם עוצר בהצלחה (עם השמה מספקת) כאשר נמצאה השמה שמספקת את כל הפסוקיות.
האלגוריתם עוצר ללא הצלחה (עם מסקנה שהנוסחה אינה ספיקה) אם יש פסוקית שערך האמת שלה הוא F ואין החלטות שאפשר לשנות אותן.

<u>חוכמה שנוספת לאלגוריתמים מודרניים</u>
- שיטות חכמות לבחירת משתנה החלטה + ערך.
- מבני נתונים שמאפשרים זיהוי פסוקיות יחידה באופן מהיר.
- למידה

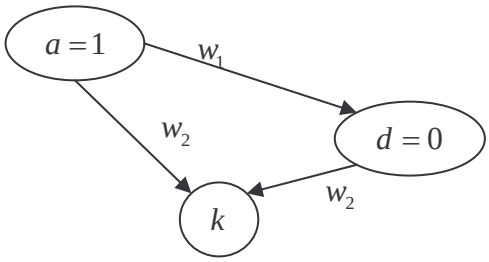
ננסה לבנות פסוקיות קונפליקט (למצוא סיבה לקונפליקט) באמצעות implication graph, (גרף גרירה):

<u>הגדרה</u>**: גרף גרירה**:
מוגדר עבור נוסחה (פסוק) והשמה חלקית שהתקבלה מהחלטות וגרירות מסוימות. (ריצה מסוימת של אלגוריתם לפתרון בעיית SAT).
זהו גרף מכוון ללא מעגלים.
<u>צמתים</u>: ליטרלים שקבלו ערך בהשמה החלקית, ויש צומת k עבור קונפליקט.
<u>קשתות</u>: לצומת החלטה אין קשתות נכנסות. (מתאים לליטרל שקיבל ערך בהחלטה)
לצומת שמתאים להשמה שנובעת מגרירה (ע"פ פסוקית יחידה w), האבות של הצומת הם הליטרלים האחרים ב w (כבר יש להם ערך בהשמה החלקית). הקשתות האלו מסומנות ב w.

לדוגמה, אם $w=\left(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_7\right)$ ו $A=\left\{x_1=1, x_2=0\right\}$ אז הגרף יראה כך:

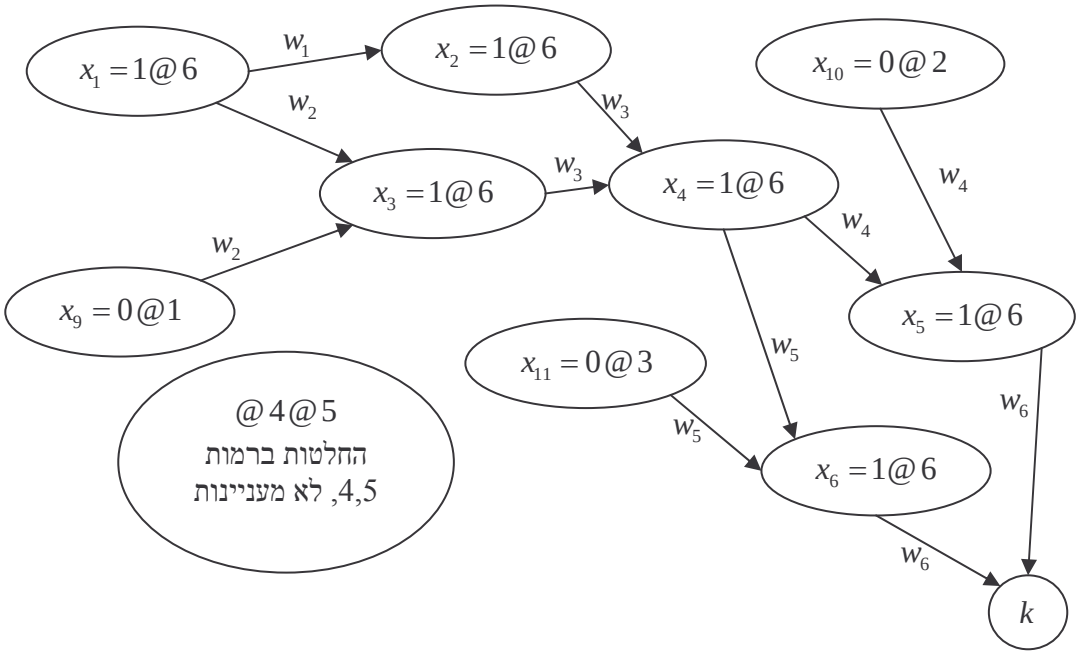


דוגמה נוספת: $\underbrace{\left(\neg a \vee \neg d\right)}_{w_1} \wedge \underbrace{\left(\neg a \vee d\right)}_{w_2}$, $A=\left\{a=1\right\}$



דוגמה:

$$w_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$$
$$w_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_9)$$
$$w_3 = (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$
$$w_4 = (\neg x_4 \vee x_5 \vee x_{10})$$
$$w_5 = (\neg x_4 \vee x_6 \vee x_{11})$$
$$w_6 = (\neg x_5 \vee \neg x_6)$$



הערה: כדי לבנות פסוקית קונפליקט, נסתכל רק על תת גרף הגרירה שממנו הקונפליקט יסיג.

חתך: מבדיל בין צומת הקונפליקט לצמתי ההחלטה.
פסוקית קונפליקט שנוסיף: $(x_{10} \vee \neg x_1 \vee \times_9 \vee x_{11})$ (הפסוקית תקבל ערך אמת רק אם לפחות אחד מהליטרלים שבהשמה שגרמה לקונפליקט, יקבל ערך אמת הפוך מזה שקיבל בהשמה).