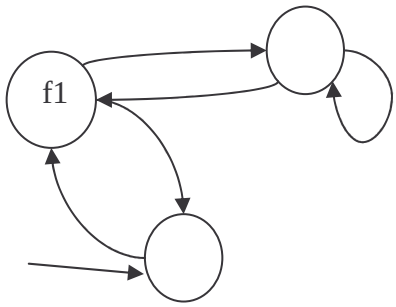
Quantified Boolean Formulas (QBF)

נגדיר את הכמתים "קיים" ו"לכל" באמצעות הצבות:

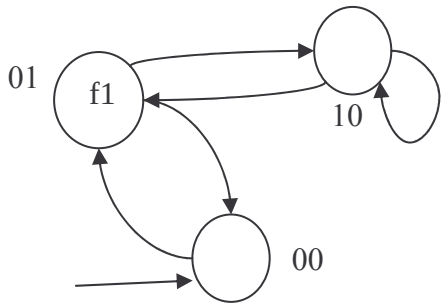
קיים	$\exists x : f$	$\equiv$	$f\|_{x=0} \vee f\|_{x=1}$
לכל	$\forall x : f$	$\equiv$	$f\|_{x=0} \wedge f\|_{x=1}$

נניח שרוצים לבדוק את הנוסחה EXf_1



מה שעשינו עד כה זה לסמן את כל המצבים שבהם מתקיים f_1 ואז ללכת "אחורה" ולסמן את כל הצמתים שבהם מתקיים EXf_1.

אם יש לנו שלושה מצבים אז אנחנו צריכים שני ביטים כדי לייצג אותם. למשל: (V_1, V_2)



$init : \neg V_1 \wedge \neg V_2$

$R : (\neg V_1 \wedge \neg V_2 \wedge \neg V_1' \wedge V_2') \vee (\neg V_1 \wedge V_2 \wedge \neg V_1' \wedge \neg V_2')$

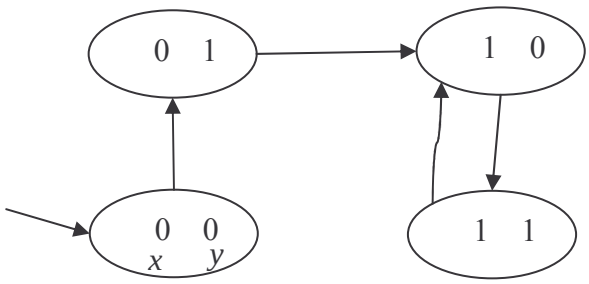
כך עובד ה $RuleBase$ יתורגם ל: $(x' \leftrightarrow x \vee y) \wedge (y' \leftrightarrow \neg y)$

$init(x) = 0;$

$init(y) = 0;$

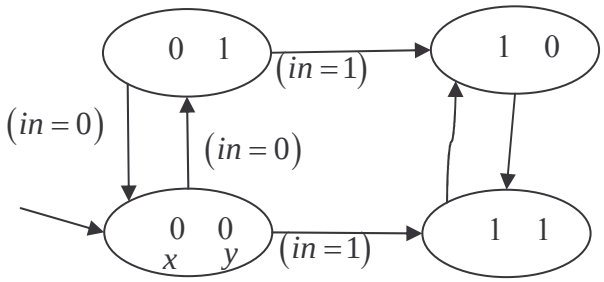
$next(x) = x \vee y;$

$next(y) = \neg y$



עוד דוגמה:

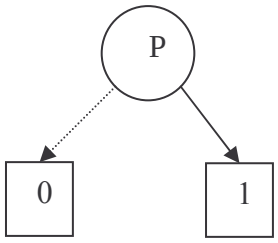
$$init(x)=0$$
$$init(y)=0$$
$$next(x)=x\vee(in)$$
$$next(y)=\neg y$$



אלגוריתם לבדיקת מודל סימבולית, מקבל תת נוסחה ב CTL ומחזיר BDD המייצג נוסחה המייצגת את כל המצבים שמספקים את תת הנוסחה.

בהינתן תת נוסחה f :

אם $f=p\in AP$ אז ה BDD שיתקבל הוא:



אם $f=f_1\wedge f_2$ נחזיר את ה BDD שהוא פעולת *and* של ה BDD-ים של f_1 ושל f_2 .
באופן דומה, לגבי כל אופרטור בינארי אחר.

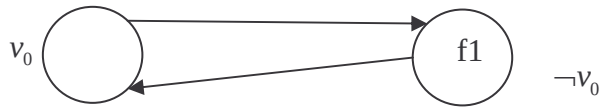
אם $f=\neg f_1$ אז נחזיר BDD הזה לזה של f_1 פרט לכך שהערכים בעלים הפוכים.

אם $f=EXf_1$ אז אפשר להחליף את זה ב:

$$EXf_1=\exists\bar{v}'\left[f_1(\bar{v}')\wedge R(\bar{v},\bar{v}')\right]$$

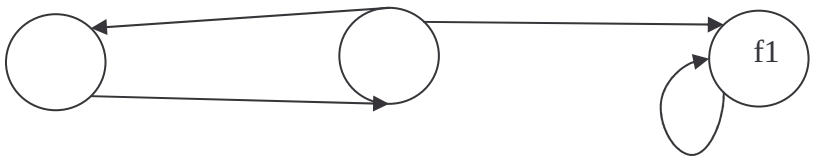
זאת אומרת שסט המשתנים $\bar{v}$ מקיים את הנוסחה EXf_1 אם קיים סט משתנים $\bar{v}'$ שמקיים את f_1 ובנוסף קיימת קשת מהצומת המסמל את $\bar{v}$ אל הצומת המסמל את $\bar{v}'$.

לדוגמה:



$$EXf_1=\exists\bar{v}'\left[f_1(v')\wedge R(v,v')\right]=\exists\bar{v}':(\neg v_0')\wedge\left((v_0\wedge\neg v_0')\vee(\neg v_0\wedge v_0')\right)$$
$$=\exists\bar{v}'(v_0\wedge\neg v_0')\vee\cancel{(\neg v_0'\wedge\neg v_0\wedge v_0')}=\left(v_0\wedge\neg v_0'|_{v_0'=0}\right)\vee\left(v_0\wedge\neg v_0'|_{v_0'=1}\right)=v_0$$

אם $f = EFf_1$



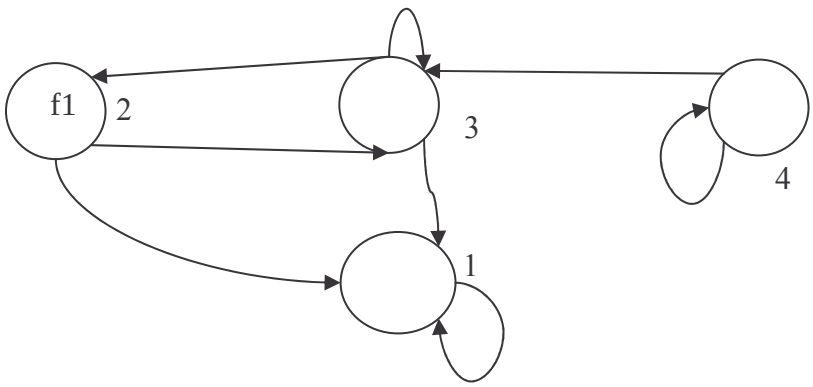
נשמור את כל קבוצת המצבים שראינו עד עכשיו (באמצעות BDD). כל פעם נגדיל את הקבוצה הזאת (נשנה את ה BDD).

האלגוריתם:

אתחול:

$$Q \leftarrow false(=\phi)$$
$$Q' \leftarrow f_1(\overline{v})$$
$$\text{while}\left(Q(\overline{v}) \neq Q'(\overline{v})\right)$$
$$\{$$
$$Q(\overline{v}) \leftarrow Q'(\overline{v})$$
$$Q'(\overline{v}) \leftarrow Q(\overline{v}) \vee EXQ(\overline{v})$$
$$\}$$
$$f(\overline{v}) = Q(\overline{v})$$

אם $f(x) = x$ אז x היא נקודת שבת הקטנה ביותר leaset-fix-point.



Q'	Q
ϕ	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\} \cup \{3\} = \{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{2,3,4\}$
$\{2,3,4\}$	$\{2,3,4\} \cup \{2,3,4\} = \{2,3,4\}$

אם $f = Ef_1Uf_2$:

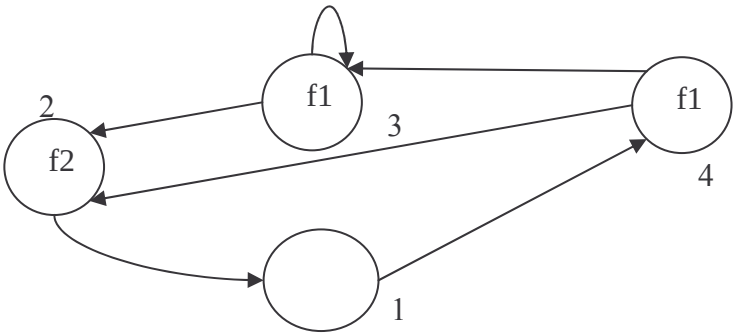
האלגוריתם:

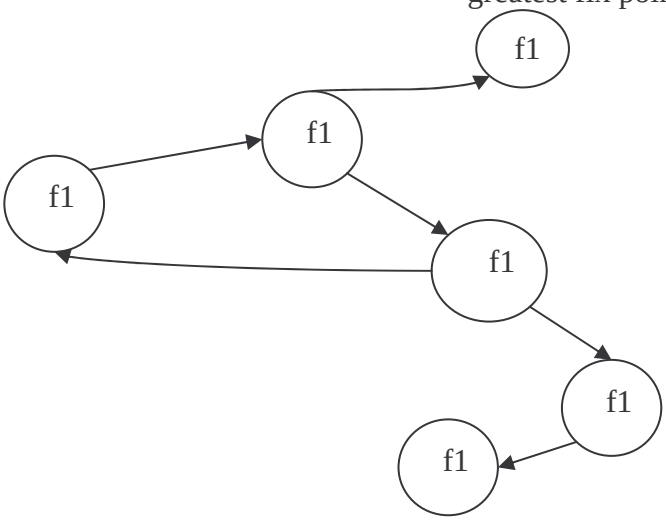
אתחול:

$$Q \leftarrow false(=\phi)$$
$$Q' \leftarrow f_2(\bar{v})$$

$$\text{while}\left(Q(\bar{v}) \neq Q'(\bar{v})\right)$$
$$\{$$
$$Q(\bar{v}) \leftarrow Q'(\bar{v})$$
$$Q'(\bar{v}) \leftarrow Q(\bar{v}) \vee \left(f_1(\bar{v}) \wedge EXQ(\bar{v})\right)$$
$$\}$$
$$f(\bar{v}) = Q(\bar{v})$$

דוגמה:



Q'	Q
ϕ	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\} \cup \{3,4\} = \{2,3,4\}$
$\{2,3,4\}$	$\{2,3,4\} \cup \{2,3,4\} = \{2,3,4\}$

נקודת שבת הגדולה ביותר: greatest fix point