<u>משפט</u>: אם $L \subseteq \Sigma^*$ היא שפה רגולארית ו $L^\infty \subseteq \Sigma^\infty$ היא שפה ω רגולארית, אזי:
$LL^\infty = \{uw \mid u \in L \wedge w \in L^\infty\}$ היא גם שפה ω רגולארית.

רעיון ההוכחה - נשתמש באוטומטים של שתי השפות על מנת לבנות אוטומט חדש שיקבל את השפה LL^∞. המצבים המקבלים יהיו המצבים המקבלים של L^∞ ומתוך כל מצב מקבל של L יהיה אפשר להתקדם לאותו מקום שאפשר להגיע מהמצב התחילי של L^∞.

פורמאלי:
$L = L(M_1)$ כאשר $M_1 = \langle S^1, \Sigma, s_0^1, \delta^1, F^1 \rangle$.
$L^\infty = L^\infty(M_2)$ כאשר $M_1 = \langle S^2, \Sigma, s_0^2, \delta^2, F^2 \rangle$
אפשר להניח שאין מצבים משותפים לשני האוטומטים: $S^1 \cap S^2 = \phi$.
אזי: $LL^\infty = L^\infty(M)$ כאשר $M = \langle S_1 \cup S_2, \Sigma, s_0^1, \delta, F^2 \rangle$
כאשר: $\delta = \delta^1 \cup \delta^2 \cup \{\langle f, \sigma, s \rangle \mid f \in F^1 \wedge \langle s_0^2, \sigma, s \rangle \in \delta^2\}$.

אם $v \in LL^\infty$ אז קיים פירוק $v = uw$ כך ש $u \in L$ ו $v \in L^\infty$. לכן $u \in L(M_1)$ ו $w \in L^\infty(M_2)$.
אם $u \in L(M_1)$ עם הרצה מקבלת p ו $w \in L^\infty(M_2)$ עם הרצה מקבלת $s_0^2 q$ אזי pq היא הרצה מקבלת של M על uw. לכן $LL^\infty \subseteq L^\infty(M)$.

אם $\sigma \in L^\infty(M)$ אזי קיימת הרצה מקבלת M על $\sigma = \sigma_1\sigma_2...$: $q = q_1q_2...$.
$q_1 = s_0^1 \in S_1$ על פי בניית האוטומט.
יש ב q מצבים מ F^2 (אחרת האוטומט לא היה מקבל) ולכן קיים n כך ש $q_n \in S^1$ ו $q_{n+1} \in S^2$.
משום ש $\langle q_n, \sigma_n, q_{n+1} \rangle \in \delta$, ע"פ הבניה זה אומר ש $q_n \in F^1$ ו $\langle s_0^2, \sigma_n, q_{n+1} \rangle \in \delta^2$.
לכן: $u = \sigma_1...\sigma_{n-1} \in L(M_1)$ ו $w = \sigma_n\sigma_{n+1}... \in L^\infty(M_2)$.
לכן $\sigma \in LL^\infty$, כלומר: $LL^\infty \supseteq L^\infty(M)$.

<u>משפט:</u>
אם $L \subseteq \Sigma^*$ היא שפה רגולארית, אזי $L^\infty = \{w_1 w_2 ... \mid \forall i \in \mathbb{N} : w_i \in L\}$ היא שפה ω רגולארית.

רעיון ההוכחה: נניח שהאוטומט של L מכיל רק מצב מקבל אחד וזהו מצב בור, כלומר אין ממנו קשתות יוצאות. נבנה אוטומט כפול שתיים - 0 עבור מצבים לא מקבלים ו 1 עבור מצבים מקבלים.
לאחר מעבר במצב מקבל באוטומט המקורי, נעבור באוטומט החדש למצב 1, למקום שאליו היינו יכולים להגיע מתחילת האוטומט.
לאחר מעבר במצב לא מקבל באוטומט המקורי, נעבור באוטומט החדש למצב 0 (לא לתחילתו).

הוכחה: L שפה רגולארית ולכן קיים לה אוטומט M כך ש $L = L(M)$,
כאשר: $M = \langle S, \Sigma, s_0, \delta, F \rangle$.
אזי: $L^\infty = L^\infty(M^1)$ כאשר: $M^1 = \langle S^1, \Sigma, s_0^1, \delta^1, F^1 \rangle$.

$$F^1 = S \times \{1\} \qquad s_0^1 = (s_0, 0) \qquad S^1 = S \times \{0,1\}$$

$$\delta((s,i),\sigma) = \begin{cases} \delta(s,\sigma) \times \{0\} & s \notin F \\ \delta(s_0,\sigma) \times \{1\} & s \in F \end{cases}$$

תהי $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 ... \in L^\infty(M^1)$ ותהי $q = q_1 q_2 ...$ הרצה מקבלת של M^1 על σ:

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_{i_1 - 1} \sigma_{i_1} ... \sigma_{i_2 - 1} \sigma_{i_2} ...$$

כאשר לאחר כל קריאת $\sigma_{i_n - 1}$ עוברים למצב מקבל.

אזי: $\sigma_{i_n - 1} \sigma_{i_n} ... \sigma_{i_{n+1} - 2} \in L(M)$, כי $\delta^1(q_{i_n - 1}, \sigma_{i_n - 1}) = (\delta(s_0, \sigma_{i_n - 1})) \times \{1\}$.

לכן $L^\infty(M^1) \subseteq L^\infty$.

הכיוון השני דומה - לכל רצף של מילים מ L, לאחר שמסיימים לקרוא מילה ב L, מגיעים למצב מקבל, ולכן המצב הבא, לאחר קריאת האות הראשונה של המילה הבאה, יהיה המצב שאליו היינו מגיעים מ s_0 עם האות הראשונה של המילה הבאה, אבל ב-1, כלומר במצב מקבל באוטומט החדש.
לכן בהרצה על אינסוף מילים מ L, נעבור אינסוף פעמים במצבים מקבלים.
לכן $L^\infty(M^1) \supseteq L^\infty$

<u>הערה</u>: משני המשפטים האחרונים נובע כי אם L_1 ו L_2 הן שפות רגולאריות, אז השפה $L_1 L_2^\infty$ היא שפה ω רגולארית.

עבור קבוצה X נסמן על ידי $X^{(r)}$ את אוסף כל תתי הקבוצות של X, שמכילות בדיוק r איברים.
$X^{(r)}=\{Z\subseteq X \mid |Z|=r\}$.
דוגמה: אם $X=\{1,2,3\}$
אז $X^{(2)}=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. $X^{(3)}=\{\{1,2,3\}\}$. $X^{(1)}=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

<u>למה</u>: תהי X קבוצה אינסופית, $r\geq 1$ ותהי $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ חלוקה של $X^{(r)}$, כלומר $\bigcup_{i=1}^{n}\varepsilon_i=X^{(r)}$ ו
$\varepsilon_i\cap\varepsilon_j=\phi$ לכל $i\neq j$ עבור $i,j\in\{1,\dots,n\}$.
דוגמה עבור קבוצה סופית: $X=\{1,2,3\}$, $r=2$, $X^{(r)}=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$, $n=2$
$\varepsilon_1=\{\{1,2\},\{1,3\}\}$, $\varepsilon_2=\{\{2,3\}\}$.

אזי קיים $i\in\{1,\dots,n\}$ וקיימת תת קבוצה אינסופית $Y\subseteq X$ כך ש $Y^{(r)}\subseteq\varepsilon_i$.
עבור הדוגמה הקודמת, $Y=\{1,2\}$, $i=1$. נקבל: $Y^{(2)}=\{\{1,2\}\}\subseteq\varepsilon_1=\{\{1,2\},\{1,3\}\}$.

הוכחה: באינדוקציה על r.
בסיס: $r=1$. במקרה זה $\bigcup_{i=1}^{n}\varepsilon_i=X^{(1)}$ כאשר כל אחד מה- ε_i-ים מכיל אוסף של קבוצות בגודל 1 של אחת ממנה מכילה איבר מ X.
מכיוון ש X אינסופית, קיים ε_i אינסופי, המכיל אינסוף קבוצות בגודל 1 כנ"ל.
נבחר את Y להיות כל האיברים מ X הנמצאים בתוך איברים מ ε_i.
נקבל ש $Y^{(1)}$ הוא בדיוק ε_i.

דוגמה:
אם $X=\{1,2,3,\dots\}$ ו $X^{(1)}=\{\{1\},\{2\},\{3\},\dots\}$ ו- $\varepsilon_1=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ ו- $\varepsilon_2=\{\{4\},\{5\},\dots\}$
אז נבחר $Y=\{4,5,\dots\}\subseteq X$ ונקבל: $Y^{(1)}=\{\{4\},\{5\},\dots\}=\varepsilon_2$.

הערה: בהרצאה היה רשום $\bigcup_{i=1}^{n}\varepsilon_i=X^{(1)}=X$ אולם זה לא יתכן כי X הוא קבוצה של איברים ו $X^{(1)}$ הוא **קבוצה של קבוצות** של איברים.
בנוסף היה רשום $Y=\varepsilon_i$ ושוב זה לא יתכן כי ε_i הוא לא תת קבוצה של X אלא **קבוצה של תתי קבוצות** של X.

צעד האינדוקציה: יהי $r>1$ ונניח כי הטענה נכונה עבור כל r' המקיים $r'<r$.
נבנה סדרה של שלישיות $\langle a_0,X_0,i_0\rangle,\langle a_1,X_1,i_1\rangle,\dots,\langle a_j,X_j,i_j\rangle,\dots$ כאשר $a_j\in X$, $X_j\subseteq X$
היא קבוצה אינסופית ו $i_j\in\{1,\dots,n\}$ עבור $j=0,1,\dots$.
הסדרה תקיים את התכונות הבאות:
1. $a_{j+1}\in X_j\subseteq X-\{a_0,a_1,\dots,a_j\}$
2. $X_{j_2}\subseteq X_{j_1}$ עבור $j_1<j_2$. מסקנה מתכונות 1 ו- 2: לכל $i>j$, $a_i\in X_j$
3. אם $u\in X_j^{(r-1)}$ אזי $u\cup\{a_j\}\in\varepsilon_{i_j}$.

נניח שבנינו את הסדרה הנ"ל. קיים i שמופיע אינסוף פעמים בסדרה $i_0, i_1, \ldots, i_j, \ldots$.

כלומר: $i = i_{k_1} = i_{k_2} = \ldots$.

נראה שהקבוצה: $Y = \{a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\}$ מקיימת את תנאי הלמה. $Y = \{a_j \mid i_j = i\}$.

טענה: $Y^{(r)} \subseteq \varepsilon_i$.

אם $\{a_{k_{l_1}}, \ldots, a_{k_{l_r}}\} = u \in Y^{(r)}$ כאשר $k_{l_1} < k_{l_2} < \ldots < k_{l_r}$ אזי:

נגדיר: $u' = u - \{a_{k_{l_1}}\}$ אזי: $u' = \{a_{k_{l_2}}, a_{k_{l_3}}, \ldots, a_{k_{l_r}}\} \subseteq X_{k_{l_1}}$

הסבר: זה נובע מהמסקנה הקודמת: לכל $i > j$, $a_i \in X_j$

u' היא קבוצה בגודל $r-1$, המכילה איברים מתוך $X_{k_{l_1}}$.

לכן $u' \in X_{k_{l_1}}^{(r-1)}$. לכן על פי התכונה השלישית, נקבל: $u = u' \cup \{a_{k_{l_1}}\} \in \varepsilon_{i_{k_{l_1}}}$

מכיוון ש $i = i_{k_{l_1}}$ נקבל ש $u \in \varepsilon_i$.

לכן $Y^{(r)} \subseteq \varepsilon_i$.

<u>בניית הסדרה של השלישיות</u>

נבנה את השלישייה $\langle a_{j+1}, X_{j+1}, i_{j+1} \rangle$ מ X_j באופן הבא:

נגדיר: $X_{-1} = X$.

צעד האינדוקציה: a_{j+1} הוא איבר כלשהו של X_j.

נסמן: $Y_j = X_j - \{a_{j+1}\}$.

$\varepsilon_i' = \{u \in Y_j^{(r-1)} \mid u \cup \{a_{j+1}\} \in \varepsilon_i\}$ עבור $i \in \{1, \ldots, n\}$.

נראה ש $\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n'$ היא חלוקה של $Y_j^{(r-1)}$:

אם $u \in Y_j^{(r-1)}$ אזי u היא קבוצה בגודל $r-1$ של איברים מתוך Y_j ולכן קיים k כך ש $u \cup \{a_{j+1}\} \in \varepsilon_k$. לכן $u \in \varepsilon_k'$ - כלומר לכל איבר ב $Y_j^{(r-1)}$ קיים ε_k' שהוא שייך אליו.

החיתוך בין שתי קבוצות ε_i' ו ε_k' ריק:

אם לוקחים שתי קבוצות של תתי קבוצות בגודל $(r-1)$ - הקבוצות ε_i' ו ε_k' ומוסיפים לכל אחת מהקבוצות המוכלות בהן את האיבר $\{a_{j+1}\}$ אזי מקבלים את הקבוצות ε_i ו ε_k. מכיוון ש $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ חלוקה של $X^{(r)}$ זה אומר שהחיתוך שלהן ריק: $\varepsilon_i \cap \varepsilon_j = \phi$.

וזה יתכן, רק אם החיתוך $\varepsilon_i' \cap \varepsilon_k'$ הוא ריק.

לכן $\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n'$ היא חלוקה של $Y_j^{(r-1)}$.

על פי הנחת האינדוקציה על r, קיים i_{j+1} ו $X_{j+1} \subseteq Y_j$ אינסופית, כך ש $X_{j+1}^{(r-1)} \subseteq \varepsilon_{i_{j+1}}'$.

ברור ש $\langle a_{j+1}, X_{j+1}, i_{j+1} \rangle$ מקיימת את התנאים הנ"ל.

דוגמה: נניח ש $X_j = \{1,2,3,...\}$ ו $r = 2$. נראה כיצד לבנות את $\langle a_{j+1}, X_{j+1}, i_{j+1} \rangle$.

$X_j^{(2)} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},...\}$.

נניח: $\varepsilon_1 = X_j^{(2)} - \{\{1,2\},\{1,3\}\}$ ו $\varepsilon_2 = \{\{1,2\}\}$ ו $\varepsilon_3 = \{1,3\}$, כלומר יש 3 קבוצות של תתי קבוצות בגודל 2.

נגדיר: $Y_j = X_j - \{1\} = \{2,3,...\}$. כלומר $a_{j+1} = 1$.

נקבל:

$\varepsilon_1' = \{\{4\},\{5\},...\}$ $\varepsilon_2' = \{\{2\}\}$ $\varepsilon_3' = \{\{3\}\}$

על פי הנחת האינדוקציה קיים i_{j+1} וקיים $X_{j+1} \subseteq Y_j = \{2,3,...\}$ כך ש $X_{j+1}^{(1)} \subseteq \varepsilon_{i_{j+1}}'$.

זה אכן מתקיים: $X_{j+1} = \{5,6,...\}$.

הקבוצה $X_{j+1}^{(1)} = \{\{5\},\{6\}...\}$ אכן מוכלת בתוך $\varepsilon_1' = \{\{4\},\{5\},...\}$.

לכן האיבר הבא בסדרה יהיה: $\langle 1, X_{j+1}, 1 \rangle = \langle 1, \{5,6,...\}, 1 \rangle$.

<u>משפט:</u>

תהי $L_1, L_2, ..., L_n$ חלוקה של Σ^* ותהי $\sigma \in \Sigma^\infty$ מילה אינסופית.

אזי קיים $k \in \{1,...,n\}$ וקבוצה אינסופית של מספרים טבעיים, I, כך שלכל $i, j \in I$ ו $i < j$ מתקיים:

$\sigma[i,j] = \sigma(i),...,\sigma(j-1) \in L_k$. נסמן: $\sigma(i) = \sigma_i$.

דוגמה: $\Sigma = \{0,1\}$ $L_1 = \{0,1\}$, $L_2 = \{\varepsilon\}$, $L_3 = \{w \mid$ האורך של w זוגי והיא לא $\varepsilon\}$

$L_4 = \{w \mid 1$ אי-זוגי וגדול ממש מ- w האורך של$\}$ נניח $\sigma = 0101010...$

<u>הוכחה</u>: נגדיר: $\varepsilon_k = \{\{i,j\} \mid \sigma[i,j] \in L_k \wedge i < j\}$

על פי הדוגמה הקודמת: $\varepsilon_1 = \{\{i,i+1\} \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\varepsilon_2 = \phi$

$\varepsilon_3 = \{\{i,j\} \mid$ ההפרש ב j ל i הוא חיובי זוגי$\}$

$\varepsilon_4 = \{\{i,j\} \mid$ ההפרש ב j ל i הוא חיובי אי-זוגי גדול מ 1$\}$

נקבל ש $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ היא חלוקה של $\mathbb{N}^{(2)}$.

על פי הלמה, קיים $k \in \{1,...,n\}$ וקיימת קבוצה $I \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית כך ש $I^{(2)} \subseteq \varepsilon_k$.

כלומר על פי ההגדרה הנ"ל, אם $i, j \in I$ ו $i < j$ אזי $\{i,j\} \in \varepsilon_k$.

על פי ההגדרה: $\varepsilon_k = \{\{i,j\} \mid \sigma[i,j] \in L_k \wedge i \le j\}$, זה אומר ש $\sigma[i,j] \in L_k$. מש"ל.

על פי הדוגמה: נבחר בקבוצה: $I = \{2,4,6,...\}$ ובאיבר $k = 3$.

נקבל ש: $I^{(2)} \subseteq \varepsilon_3 = \{\{i,j\} \mid$ ההפרש ב j ל i הוא חיובי זוגי$\}$

ואכן, לכל $i, j \in I$ אם $i < j$ אז המילה $\sigma[i,j]$ היא מילה באורך זוגי, ולכן שייכת ל L_3.

<u>משפט:</u> תהי $L^\infty \subseteq \Sigma^\infty$ שפה ω רגולארית.
אזי קיימת קונגרואנציה דו צדדית "$\approx$" בעלת מספר **סופי** של מחלקות שקילות, $L_1,\dots,L_l$ על Σ^* כך ש
$L^\infty = \bigcup_{j=1}^{l} L_{i_j} L_{k_j}^\infty$ עבור זוגות מסוימים $(i_1,k_1),\dots,(i_l,k_l)$.

קונגרואנציה דו צדדית - יחס שקילות (רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי) אינווריאנטי משני הצדדים.
כלומר: לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים: $x \approx x$. (רפלקסיביות)
לכל $x,y \in \Sigma^*$ מתקיים: $x \approx y \Leftrightarrow y \approx x$. (סימטריות)
לכל $x,y,z \in \Sigma^*$ מתקיים: $x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx z$. (טרנזיטיביות)
אינווריאנטי משמאל: $x \approx y \Rightarrow \forall z : zx \approx zy$
אינווריאנטי מימין: $x \approx y \Rightarrow \forall z : xz \approx yz$

הוכחה: L^∞ היא שפה ω רגולארית ולכן קיימת מכונה M כך ש $L^\infty = L^\infty(M)$ כאשר
$M = \langle S,\Sigma,s_0,\delta,F \rangle$.

עבור זוג מצבים $s_1,s_2 \in S$ ומילה סופית $\sigma \in \Sigma^*$ נגדיר שתי נוסחאות:
$$P(s_1,\sigma,s_2) = TRUE \Leftrightarrow \sigma \in L(\langle S,\Sigma,s_1,\delta,\{s_2\}\rangle)$$
כלומר הנוסחה מקבלת ערך אמת $TRUE$ אם ורק אם ניתן להגיע מהמצב s_1 אל המצב s_2 על ידי קריאת המילה σ.

(בתנועות מ s_1 אל s_2 עוברים במצב מקבל $R(s_1,\sigma,s_2) = P(s_1,\sigma,s_2) \wedge (q_i \in F$

נגדיר: $\sigma_1 \approx \sigma_2$ אם ורק אם:
$$(\forall s_1,s_2 \in S)\left[P(s_1,\sigma_1,s_2) \equiv P(s_1,\sigma_2,s_2) \wedge R(s_1,\sigma_1,s_2) \equiv R(s_1,\sigma_2,s_2)\right]$$
מכיוון ש $\equiv$ הוא יחס שקילות (רפלקסיבי, טרנזיטיבי וסימטרי) אזי גם $\approx$ הוא יחס שקילות.

מכיוון שיש רק מספר סופי של זוגות $(s_1,s_2) \in S^2$, מספר מחלקות השקילות של $\approx$ הוא סופי.

$\approx$ הוא קונגרואנציה דו צדדית כי P ו R הן קונגרואנציות דו צדדיות. איך זה יכול להיות? הרי אלו בכלל לא יחסים דו מקומיים?

מהמשפט הקודם נובע כי $\bigcup_{1\le i,k\le n} L_i L_k^\infty = \Sigma^\infty$.
זאת מכיוון שאם $\sigma \in \Sigma^\infty$ אזי קיים k כך ש $\sigma = w_0 w_1 w_2 \dots w_l \dots$ ו $w_l \in L_k$ לכל $l \in \{1,2,\dots\}$.
משום ש $\bigcup_{i=1}^{n} L_i = \Sigma^*$ אז קיים i כך ש $w_0 \in L_i$.
כלומר: $\sigma \in L_i L_k^\infty$.

נוכיח כעת כי אם $\alpha,\beta \in L_i L_k^\infty$ ו $\alpha \in L^\infty$ אזי $\beta \in L^\infty$.

אם $\alpha = \overbrace{w_0}^{\in L_i}\overbrace{w_1}^{\in L_k}\overbrace{w_2}^{\in L_k}\ldots$ וגם $\beta = \overbrace{u_0}^{\in L_i}\overbrace{u_1}^{\in L_k}\overbrace{u_2}^{\in L_k}\ldots$

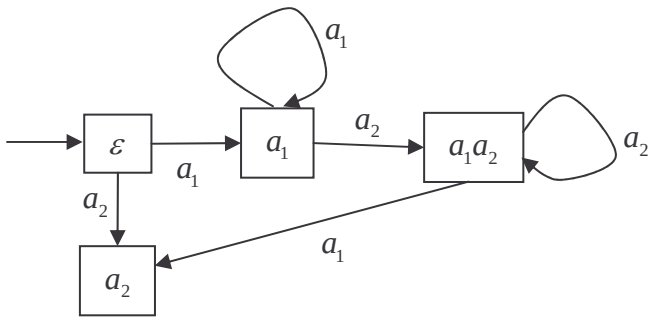
אז לאחר קריאת w_0 ולאחר קריאת u_0, מכיוון שהן נמצאות באותה מחלקת שקילות L_l, עברנו באחת במצב מקבל אם ורק אם עברנו בשניה במצב מקבל.

באופן דומה, עבור כל אחד מזוגות מהמילים $w_{i\geq 1}$ ו $u_{i\geq 1}$, מכיוון שהן נמצאות באותה מחלקת שקילות, L_k, עברנו באחת במצב מקבל אם ורק אם עברנו בשניה במצב מקבל.

מכיוון ש $\alpha \in L^\infty$ זה אומר שעברנו אינסוף פעמים במצבים מקבלים, ולכן גם בקריאת β נעבור אינסוף פעמים במצבים מקבלים. לכן $\beta \in L^\infty$.

מסקנה: $L^\infty = \bigcup\left\{L_i L_k^\infty \mid L_i L_k^\infty \cap L^\infty \neq \phi\right\}$ - כלומר מספיק לבדוק עבור כל זוג $L_i L_k^\infty$ אם קיימת מילה אחת השייכת גם אליה וגם ל L^∞ ואם כן, אז כל $L_i L_k^\infty$ מוכלת ב L^∞.

הערה: ניתן להכריע האם $\sigma_1 \approx \sigma_2$ מפני שניתן להכריע את P ואת R.
לכן ניתן לבנות את הדיאגראמה של מלחקות השקילות.
מתחילים מ ε ומ- $[\sigma]$. בונים את $[\sigma a]$:



מה אמור להיות הציור הזה???

על פי המשפט של נרוד, אפשר לבנות אוטומטים $M_1,\ldots,M_n$ כך ש: $L_i = L(M_i)$ עבור $i \in \{1,\ldots,n\}$

<u>משפט:</u>
השפות ה ω רגולאריות סגורות תחת משלים.
הוכחה: תהינה $L_1,\ldots,L_n$ כמו קודם. אזי:
$\overline{L}^\infty = \cup\left\{L_i L_k^\infty \mid L_i L_k^\infty \cap L^\infty = \phi\right\}$.
אין בעיה להכריע האם $L_i L_k^\infty \cap L^\infty = \phi$ ואיחוד של שפות ω רגולאריות הוא גם כן שפה ω רגולארית.

איך מכריעים? זה דורש ש L_i, L_k^∞ יהיו שפות הניתנות להכרעה. היכן נאמר קודם שהן כאלו?