תזכורת מהרצאה 10:
<u>משפט:</u> השפה: {F היא QBF שערך האמת של הוא 1 $L=\{F \mid$ היא PSPACE שלמה ביחס לזמן פולינומי.

הוכחנו ש $L \in PSPACE$.
נשאר להוכיח שלכל שפה $L' \in PSPACE$ קיימת טרנספורמציה פולינומית ל L.

$L' \in PSPACE$ לכן קיימת מכונת טיורינג **<u>דטרמיניסטית</u>** M בעלת סיבוכיות מקום **<u>פולינומית</u>**, כך ש $L'=L(M)$.

לכן קיימים קבוע c ופולינום $p(n)$ כך שבהינתן קלט באורך n, המכונה M עושה לכל היותר $c^{p(n)}$ תנועות על אותו הקלט.
זאת מכיוון שלמכונה יש לכל היותר $p(n)$ תאים בסרט ולכן לכל היותר $c^{p(n)}$ תצורות שונות.

נסמן: $M=(Q,\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,F)$

אם קלט x מתקבל ע"י M ו $|x|=n$, אזי הוא מתקבל ע"י סדרת תצורות: $I_0|-I_1|-...|-I_{c^{p(n)}}$
(אפשר להניח כי האורך של כתצורה בסדרה הנ"ל הוא בדיוק $p(n)$ ולהניח שהעצירה מתבצעת ע"י הגעה למצב מקבל, ואז הישארות שם עד שמגיעים ל $c^{p(n)}$ צעדים.

נשתמש במשתנים הבוליאניים c_{ix} כאשר $1 \le i \le p(n)$ ו $x \in \Gamma \cup \{\Gamma \times Q\}$.

המשמעות של $c_{ix}=1$:
אם $x \in \Gamma$ אז זה אומר שבמקום ה i בתצורה נמצא הסימן x.
אם $x=(a,q) \in \Gamma \times Q$ אז זה אומר שבמקום ה i בתצורה נמצא הסימן a והמכונה נמצאת במצב q, עם הראש במקום ה i.

נסתכל על הקבוצה בת $p(n)$ איברים: $I=\{c_{ix} \mid 1 \le i \le p(n)\}$
על מנת להיות בתצורה תחילית, צריך שהראש הקורא יעמוד על התו הראשון במצב התחילי, ב n התאים הראשונים יהיו אותיות הקלט, ואח"כ סימנים ריקים.

זה יקרה אם הנוסחה: $c_{i\#} \underbrace{\wedge}_{n<i\le p(n)} c_{ia_i} \underbrace{\wedge}_{2\le i\le n} c_{1(a_1,q_0)}$ תקבל ערך אמת.

נתבונן בקבוצות בנות $p(n)$ איברים: $I_1=\{c'_{ix} \mid 1 \le i \le p(n)\}$ $I_2=\{c''_{ix} \mid 1 \le i \le p(n)\}$

נגדיר פרדיקט $F_i(I_1,I_2)$ באופן הבא: $F_i(I_1,I_2)=1$ אם ורק אם I_1 ו I_2 מייצגות תצורות $x'_1...x'_{p(n)}$, $x''_1...x''_{p(n)}$ של M וגם $I_1|-^{\le 2^i} I_2$.
כלומר, מדובר בתצורות שניתן להגיע מהראשונה אל השניה תוך לכל היותר 2^i צעדים.

אזי מילה x באורך n שייכת ל $L(M)$ אם ורק אם הערך של הנוסחה
$Q_x=\exists I_0 \exists I_f \left(F_{p(n)}(I_0,I_f)\right) \wedge INITIAL(I_0) \wedge FINAL(I_f)$ הוא אמת.

הנוסחה של $INITIAL(I)$ אומרת ש I מייצגת תצורה תחילית.
הנוסחה של $FINAL(I)$ אומרת ש I מייצגת תצורה סופית.
שתי הנוסחאות הנ"ל לא מכילות כמתים.

<u>בניית הנוסחה:</u> $F_i(I_1,I_2)$:
אנחנו יכולים לרשום נוסחה בוליאנית באורך $O(p(n))$ שאומרת $I_1|-I_2$ או $I_1|-^0I_2$ שהיא $F_0(I_1,I_2)$. (עבור $I_1|-^0I_2$ צריך פשוט לבדוק שלכל i $c'_{ix}=c''_{ix}$ ועבור $I_1|-I_2$ צריך לבדוק שיש תנועה של צעד אחד של הראש על פי δ ושאר התאים זהים).

$F_j(I_1,I_2)=\exists I\left(F_{j-1}(I_1,I)\wedge F_{j-1}(I,I_2)\right)$ - כלומר אפשר להגיע מ I_1 אל I_2 תוך 2^j צעדים אם קיימת תצורה I שאפשר להגיע אליה מ I_1 תוך 2^{j-1} צעדים ואפשר להגיע ממנה אל I_2 תוך 2^{j-1} צעדים.

הבעיה בנוסחה הזאת היא שהיא רקורסיבית, כאשר בכל עומק שהרקורסיה, יש פי 2 איברים מהעומק הקודם. לכן לא נוכל לרשום את כל הנוסחה הזאת. נפעיל את ה"טריק" הבא:

נוסחה זאת שווה לנוסחה:

$$\exists I\forall J\forall K\begin{bmatrix}((J=I_1)\wedge(K=I))\rightarrow F_{j-1}(J,K)\\ \wedge((J=I)\wedge(K=I_2))\rightarrow F_{j-1}(J,K)\end{bmatrix}$$

כלומר קיים מצב ביניים I, כך שלכל זוג מצבים J ו K:
אם J הוא המצב הראשון I_1 ו K הוא מצב הביניים I, אז ניתן להגיע מ J אל K תוך 2^{j-1} צעדים.
אם J הוא מצב הביניים I ו K הוא המצב האחרון I_2, אז ניתן להגיע מ J אל K תוך 2^{j-1} צעדים.

את הנוסחה הזאת אפשר לשפץ עוד קצת ולהישאר עם אותה המשמעות באמצעות הכלל $A\rightarrow B\equiv\neg A\vee B$:

$$\exists I\forall J\forall K\begin{bmatrix}\neg((J=I_1)\wedge(K=I))\vee F_{j-1}(J,K)\\ \wedge(\neg((J=I)\wedge(K=I_2))\vee F_{j-1}(J,K))\end{bmatrix}$$

כעת נחליף באמצעות הכלל: $(\neg A\vee C)\wedge(\neg B\vee C)\equiv((\neg A)\wedge(\neg B))\vee C$:

$$\exists I\forall J\forall K\left[\left(\left(\neg((J=I_1)\wedge(K=I))\right)\wedge\left(\neg((J=I)\wedge(K=I_2))\right)\right)\vee F_{j-1}(J,K)\right]$$

כדאי לזכור את כל המעברים הללו לבחינה - הופיע במועד א', אביב התשס"ה - 2005

מספר המשתנים בנוסחה הזו הוא מספר המשתנים בנוסחה $F_{j-1}(J,K)$ ועוד $O(p(n))$.
לכן באינדוקציה, מספר המשתנים בנוסחה $F_j(I_1,I_2)$ הוא $O(j\cdot p(n))$.
משום כך, מספר המשתנים בנוסחה Q_x הוא $O(p^2(n))$.
כדי לרשום משתנה צריך $O(\log(p(n)))$ תאים, לכן אורך Q_x חסום ע"י $O(p^2(n)\cdot\log(p(n)))$ שחסום ע"י פולינום ב n.
לכן הראינו טרנספורמציה פולינומית המחליפה מילה מ L' בנוסחה בעלת ערך אמת ב L.
חשוב: טרנספורמציה זו היא גם פולינומית בזמן - כל מה שיש לעשות זה לרשום את הנוסחה $F_j(J,K)$, שמופיעה בה $F_{j-1}(J,K)$, ואז להחליף את ה $F_{j-1}(J,K)$ בנוסחה שלה.

נגדיר:

$NSPACE(\log(n)) = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \log(n)$ מתקבלת ע"י מכונת טיורינג **לא דטרמיניסטית** בעלת סיבוכיות מקום L$\}$

תהינה $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$.

רדוקציית $\log-space$ מ L_1 ל L_2 היא פונקציה $f:\Sigma^* \to \Sigma^*$ שמקיימת את התנאים הבאים:

$w \in L_1$ אם ורק אם $f(w) \in L_2$

f ניתנת לחישוב ע"י מכונת טיורינג דטרמיניסטית בעלת שלושה סרטים שפועלת באופן הבא:
הסרט הראשון הוא הסרט של הקלט ואסור לכתוב עליו.
הסרט השני הוא הסרט של הפלט שעליו מותר לנוע רק משמאל לימין.
הסרט השלישי הוא סרט העבודה, כך שבהינתן קלט באורך n, מספר התאים שמותר לבקר בהם בסרט זה חסם ע"י $O(\log(n))$.

שפה L נקראת $NSPACE(\log(n))$ שלמה, ביחס לרדוקציית $\log-space$ אם מתקיים:

1. $L \in NSPACE(\log n)$
2. עבור כל שפה $L' \in NSPACE(\log n)$ קיימת רדוקציית $\log-space$ מ L' אל L.

<u>בעיית הישיגות בגרף</u> היא: בהינתן גרף עם קודקודים $\{1,2,...,n\}$, להכריע האם קיים מסלול מקודקוד 1 אל קודקוד n.

<u>משפט</u>: בעיית הישיגות בגרף היא $NSPACE(\log n)$ שלמה ביחס לרדוקציית $\log-space$.
כלומר, השפה:

$L = \{G \mid$ G הוא גרף בעל קודקודים $\{1,...,n\}$ כך שקיים מסלול מ 1 אל n $\}$

היא $NSPACE(\log n)$ שלמה ביחס לרדוקציית $\log-space$.

<u>הוכחה</u>:

נראה קודם ש L נמצאת ב $NSPACE(\log n)$.

ניתן לקבל את L ע"י מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית שמנחשת את המסלול על סרט העבודה שלה, ובודקת אותו בהשוואה עם הקשתות הרשומות על סרט הקלט.
הערה: אין צורך לזכור את כל המסלול על סרט העבודה. מספיק לזכור רק את הקודקוד האחרון שהמכונה ניחשה אותו.
המכונה תעבוד באופן הבא: באיטרציה הראשונה היא תרשום על סרט העבודה את מספרו של המצב הראשון - זה דורש $O(\log(n))$ מקום.

לאחר מכן, בכל איטרציה היא תנחש קודקוד אחר, ותבדוק האם יש קשת מהקודקוד הרשום על סרט העבודה, אל הקודקוד שניחשה. אם לא - תיתקע.
אם כן - תמחק את הקודקוד שרשום על סרט העבודה, ותרשום במקומו את הקודקוד שניחשה. אם ניחשה את הקודקוד n - אז תקבל.

לכן אם ב G יש מסלול מ 1 אל n אז קיימת סדרת ניחושים שתביא את המכונה לקבלת G, ואם לא קיים מסלול מ 1 אל n אז המכונה לא תעצור לעולם.

תהי $L' \in NSPACE(\log n)$ ותהי M מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית בעלת סיבוכיות מקום $\log n$ שמקבלת את L'. אנחנו נבנה רדוקציית $\log-space$ מ L' ל L.

בהינתן קלט w של M, כל תצורה של M ניתנת לייצוג ע"י $O(\log(n))$ תאים:
גודל סרט העבודה הוא לכל היותר $O(\log(n))$ ולכן זה מה שדרוש בשביל לרשום מה יש בו.
גודל סרט הקלט הוא $O(n)$ ולכן צריך $O(\log(n))$ בשביל לרשום מול איזה תא נמצא הראש על סרט הקלט.

נבנה מכונת טיורינג T שמבצעת את רדוקציית $\log-space$ מ L אל L' באופן הבא:
למילה w מתאים גרף G_w שקודקודיו הם תצורות של M על קלט w וקשת (I,J) שייכת ל G_w אם ורק אם $I \vdash_M J$ (כלומר אם ניתן להגיע מתצורה I לתצורה J באמצעות המכונה M).
הקודקוד הראשון של G_w הוא I_0.
הקודקוד האחרון של G_w הוא I_f.
הערה: את כל התצורות של M על w ניתן ליצור במקום $\log(n)$.
זאת מכיוון ש מספר התצורות הוא $c^{\log(n)} = O(n^c)$ ולכן המקום הדרוש למספר שלהן הוא $O(\log(n^c)) = O(\log(n))$.

כלומר, המכונה T רושמת על סרט הפלט את כל התצורות של M, ואח"כ לכל זוג תצורות I ו J מריצה את M על I ובודקת האם היא מגיעה לתצורה J, ואם כן אז רושמת על סרט הפלט את הקשת מ I אל J.

עבור פונקציה $s(n)$ נגדיר:
$NSPACE(s(n)) = \{L \mid s(m)$ מתקבלת ע"י מ"ט בעלת סיבוכיות מקום L$\}$
$CO-NSPACE(s(n)) = \{\bar{L} \mid L \in NSPACE(s(n))\}$

משפט: אם $s(n) \geq \log(n)$ ניתנת לבניה, אזי $NSPACE(s(n)) = CO-NSPACE(s(n))$.
בפרט, שפות בעלות הקשר, סגורות תחת משלים.

<u>למה 1:</u> בהינתן מ"ט **<u>לא</u>** דטרמיניסטית M בעלת סיבוכיות מקום $s(n)$, קלט באורך n ומספר N של תצורות I באורך $s(n)$, כך ש $I_0 \vdash^* I$, ניתן להכריע במקום $s(n)$ האם M **<u>לא</u>** מקבלת את הקלט.
הוכחה: נבנה מכונת טיורינג T בעלת סיבוכיות מקום $s(n)$ שבודקת את "אי הקבלה" באופן הבא:
T עוברת על כל התצורות I של M באורך $s(n)$ על פי הסדר הלקסיקוגרפי ועבור כל תצורה בוחרת האם לבדוק אותה.
אם בחרה לבדוק אותה, משתמשת ב M על מנת לבדוק האם $I_0 \vdash^* I$.
אם כן, T מגדילה את המונה ב 1 ועוברת לתצורה הבאה.
אם לא, T נתקעת.
אם המונה מגיע ל N, ואף אחד מהתצורות שניתן להגיע אליהן מ I_0 היא לא תצורה סופית, אז T מקבלת.

אם מילה לא מתקבלת ע"י M, אז קיים מסלול בו T מנחשת שצריך לבדוק בדיוק את N התצורות ש M מגיעה אליהן ומנחשת בדיוק את החישובים של M שמגיעים לתצורות הללו. עבור ניחוש זה היא תגדיל את המונה עד שיגיע ל N, ומכיוון שאף אחד מהתצורות הנ"ל איננה תצורה סופית (אחרת M הייתה מקבלת את המילה), T תקבל את המילה.

אם מילה כן מתקבלת ע"י M, אז בכל אחד מהמסלולים, או ש T לא תנחש את התצורות הנכונות או את מסלולי החישוב הנכונים של M עליהם, וכך לא תגיע עם המונה ל N לעולם ולכן לא תעצור, או שהיא כן תנחש אותם, אבל במקרה כזה T תגלה שאחד מהמצבים שניחשה הוא מצב מקבל (תצורה סופית), ולכן תדחה את המילה.

כיצד נכריע את שפת המשלים? ניתן להריץ במקביל את M על המילה, ובמקרה כזה מובטח ש T תעצור או ש M תעצור, ולכן הגענו להכרעה.

<u>למה 2:</u> ניתן לחשב את מספר התצורות I כך ש $I_0 \mid -^* I$ במקום $s(n)$.

הוכחה: נסמן ע"י Nd את מספר התצורות שניתן להגיע אליהן מ I_0 תוך לכל היותר d צעדים.

נוכיח באינדוקציה שניתן לחשב את Nd במקום $s(n)$ ע"י מכונה לא דטרמיניסטית.

בסיס: $d=0$, $d=1$ - מידי:

$N0$ - אפשר להישאר רק בתצורה ההתחלתית.

$N1$ - ע"פ מספר המעברים האפשרי בפונקצית המעברים δ מהמצב ההתחלתי.

צעד האינדוקציה: נחשב את $Nd+1$ מתוך Nd.

נעבור על כל התצורות בסדר לקסיקוגרפי, ועבור כל תצורה I, נקרא "שגרה" הבאה:

השגרה עוברת על כל Nd התצורות שניתן להגיע אליהן מ I_0 ב d או פחות תנועות (כלומר מנחשת אותן), ועבור כל תצורה הנ"ל בודקת האם היא I או ניתן להגיע ממנה ל I בצעד אחד.

אם כן, אז מגדילים את המונה ב- 1.

ברור שהכל ניתן לבצע ב $O(s(n))$ מקום.

עוצרים כאשר $Nd = Nd+1$ כי אז $Nd = N$.