הגדרות:

יהי $G=(V,T,P,S)$ דקדוק חסר הקשר. מילה $\gamma\in(T\cup V)^*$ תיקרא **רישא חיוני** של הדקדוק G,
אם קיימת גזירה $S\Rightarrow_R^* \alpha Aw\Rightarrow_R \alpha\beta w$ כך ש γ היא רישא של $\alpha\beta$.
בעצם, כל רישא של מה שניתן לגזור בגזירה ימנית ביותר הוא רישא חיוני.

הביטוי $[A\to\beta_1.\beta_2,u]$ נקרא **פריט LR(K)** של G אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $A\to\beta_1\beta_2\in P$
2. $|u|\le k$
3. $u\in T^*$

כלומר כל כלל גזירה, כאשר מפצלים את האגף הימני לשני חלקים באמצעות נקודה, ואחריו מילה של טרמינלים באורך קצר או שווה ל k.

נאמר שהפריט $[A\to\beta_1.\beta_2,u]$ הוא **תקף** עבור רישא חיוני, $\alpha\beta_1$, אם קיימת גזירה:
$S\Rightarrow_R^* \alpha Aw\Rightarrow_R \alpha\beta_1\beta_2 w$, כך ש: $u=FIRST_k(w)$.
הערה: לכל רישא חיוני קיים פריט תקף.

משפט: הדקדוק G הוא דקדוק $LR(k)$ אם ורק אם התנאי הבא מתקיים עבור כל $u\in T^i$ לכל $i\le k$:
התנאי: יהי $\alpha\beta$ רישא חיוני של תבנית פסוקית ימנית $\alpha\beta w$ של הדקדוק המורחב G'.
אם $[A\to\beta.,u]$ הוא פריט $LR(k)$ תקף עבור $\alpha\beta$, אזי לא קיים פריט אחר $[A_1\to\beta_1.\beta_2,v]$ שהוא תקף עבור $\alpha\beta$, כך ש $u\in EFF_k(\beta_2 v)$.

הוכחה:

כיוון ראשון: נניח שהתנאי לא מתקיים ונוכיח ש G הוא לא דקדוק $LR(k)$.
כלומר, קיימים שני פריטי $LR(k)$ שונים $[A\to\beta.,u]$ ו- $[A_1\to\beta_1.\beta_2,v]$ כך ש
$u\in EFF_k(\beta_2 v)$ וגם:

1. $\alpha\beta=\alpha_1\beta_1$
2. $S'\Rightarrow_R^* \alpha Aw\Rightarrow\alpha\beta w$, $FIRST_k(w)=u$
3. $S'\Rightarrow_R^* \alpha_1 A_1 x\Rightarrow\alpha_1\beta_1\beta_2 x$, $FIRST_k(x)=v$
4. $\beta_2 x\Rightarrow_R^* uy$ בגזירה זו המשתנה הראשון אף פעם לא מוחלף ב ε.

הסבר ל 4:
נשים לב ש $u\in EFF_k(\beta_2 v)=EFF_k(\beta_2 x)$. זאת מכיוון ש $FIRST_k(x)=v$.
לכן ניתן לגזור מ $\beta_2 x$ את u עם תוספות כלשהן. נסמן את התוספות הללו ב y ונקבל: $\beta_2 x\Rightarrow_R^* uy$.
מכיוון ש $u\in EFF_k(\beta_2 x)$ זה אומר שכאשר גוזרים את uy מ $\beta_2 x$, המשתנה הראשון אף פעם לא מוחלף ב ε, על פי הגדרת EFF.

נבדיל בין 3 אפשרויות:
$\beta_2=\varepsilon$, $\beta_2\in T^+$, $\beta_2\in(T\cup V)^*-T^*$ כנראה שאחת מהאפשרויות תופיע במבחן!!!

1. $\beta_2 = \varepsilon$ - המילה הריקה.

מכיוון ש $u \in EFF_k(\beta_2 v)$ זה בעצם אומר ש $u \in EFF_k(v)$. מכיוון ש v היא מילה של טרמינלים בגודל k לכל היותר (זאת בגלל ש $FIRST_k(x) = v$) זה אומר ש $EFF_k(v) = \{v\}$, כלומר $u = v$.

$S' \Rightarrow_R^* \alpha A w \Rightarrow \alpha\beta w$ - אין שינוי.

$S' \Rightarrow_R^* \alpha_1 A_1 x \Rightarrow \alpha_1\beta_1 x = \alpha\beta x$ - אין β_2.

$FIRST_k(w) = u = FIRST_k(x) = v$

הנחנו ש $[A \to \beta., u] \neq [A_1 \to \beta_1 . \beta_2, v]$, כלומר: $[A \to \beta., u] \neq [A_1 \to \beta_1 ., v]$

מכיוון ש $v = u$ זה אומר ש $A \neq A_1$ או $\beta \neq \beta_1$.

ניזכר בהגדרה של דקדוק $LR(k)$:

אם שלושת התנאים הבאים מתקיימים:

1. $S' \Rightarrow_R^* \alpha A w \Rightarrow_R \alpha\beta w$
2. $S' \Rightarrow_R^* \gamma B x \Rightarrow_R \alpha\beta y$ (במקרה שלנו $\alpha_1 = \gamma$ $A_1 = B$ $x = y$)
3. $FIRST_k(w) = FIRST_k(y)$ (במקרה שלנו $y = x$)

אזי מתקיים: $\alpha A y = \gamma B x$. (במקרה שלנו $\alpha A x = \alpha_1 A_1 x$)

אם $A \neq A_1$ אז כמובן שלא מתקיים $\alpha A x = \alpha_1 A_1 x$ ולכן זהו לא דקדוק $LR(k)$.

אם $A = A_1$ אז $\beta \neq \beta_1$ ומכיוון ש $\alpha\beta = \alpha_1\beta_1$ זה אומר ש $\alpha \neq \alpha_1$ ושוב לא מתקיים $\alpha A x = \alpha_1 A_1 x$

לכן בכל מקרה אם $\beta_2 = \varepsilon$ הדקדוק הוא לא דקדוק $LR(k)$.

2. $\beta_2 = z \in T^+$ - מילה של טרמינלים.

$S' \Rightarrow_R^* \alpha A w \Rightarrow_R \alpha\beta w$

$S' \Rightarrow_R^* \alpha_1 A_1 x \Rightarrow \alpha_1\beta_1\beta_2 x = \alpha\beta_1 z x$ (במקרה שלנו $\alpha_1 = \gamma$ $A_1 = B$ $zx = y$)

(הקבוצה שמכילה את המילה שהיא k האותיות הראשונות של zv) $u \in EFF_k(\beta_2 v) = EFF_k(zv)$

כלומר: $FIRST_k(zx) = u = FIRST_k(w)$

כאשר $\alpha\beta = \alpha_1\beta_1$

לכן אם הדקדוק הוא דקדוק $LR(k)$ אז $\alpha A z x = \alpha_1 A_1 x$, כלומר $\alpha A z = \alpha_1 A_1$

וזה כמובן לא מתקיים כי המילה השמאלית מסתיימת בטרמינל והמילה הימנית מסתיימת במשתנה.

לכן אם $\beta_2 = z \in T^+$ הדקדוק הזה הוא לא דקדוק $LR(k)$.

3. $\beta_2 \in (T \cup V)^* - T^*$, כלומר β_2 מכיל בתוכו משתנה.

ידוע: $u \in EFF_k(\beta_2 v)$ וגם $FIRST_k(x) = v$

לכן $u \in EFF_k(\beta_2 x)$ ולכן קיימת גזירה: $\beta_2 x \Rightarrow_R^* uy$ כך ש $u = FIRST_k(uy)$.

$\beta_2 x \Rightarrow_R^* uy$

מכיוון שהמשתנה הראשון לא מוחלף ב ε, מתקיים: $\beta_2 x \Rightarrow_R^* u_1 B u_3 x \Rightarrow u_1 u_2 u_3 x = uy$

כך ש $u_1 u_2 \in T^+$ (כלומר לא מילה ריקה) ו $u_3 \in T^*$.

$S' \Rightarrow_R^* \overbrace{\alpha}^{\alpha'} \overbrace{A}^{A'} \overbrace{w}^{w'} \Rightarrow_R \overbrace{\alpha}^{\alpha'} \overbrace{\beta}^{\beta'} \overbrace{w}^{w'}$ - אין שינוי.

נציב בגזירה $S' \Rightarrow_R^* \alpha_1 A_1 x \Rightarrow_R \alpha_1 \beta_1 \beta_2 x$ ונקבל:

$$S' \Rightarrow_R^* \alpha_1 A_1 x \Rightarrow_R \alpha_1 \beta_1 \beta_2 x \Rightarrow_R^* \alpha_1 \beta_1 u_1 B u_3 x \Rightarrow_R \alpha_1 \beta_1 u_1 u_2 u_3 x = \alpha_1 \beta_1 uy$$

או בקיצור: $S' \Rightarrow_R^* \overbrace{\alpha_1 \beta_1 u_1}^{\gamma'} \overbrace{B}^{B'} \overbrace{u_3 x}^{x'} \Rightarrow_R \overbrace{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha'\beta'} \overbrace{u_1 u_2 u_3 x}^{y'}$ כאשר $\alpha\beta = \alpha_1 \beta_1$.

$$FIRST_k(w) = u = FIRST_k(uy)$$

אם הדקדוק היה דקדוק $LR(k)$ אז מתחייב ש $\alpha A u_1 u_2 u_3 x = \alpha_1 \beta_1 u_1 B u_3 x$ $(\alpha' A' y' = \gamma' B' x')$

כלומר $\alpha A u_1 u_2 = \alpha_1 \beta_1 u_1 B$ וזה כמובן בלתי אפשרי כי $u_1 u_2 \neq \varepsilon$ ולכן הביטוי השמאלי מסתיים בטרמינל והביטוי הימני מסתיים במשתנה.

לכן לא יתכן ש G הוא דקדוק $LR(k)$.

כיוון שני: נניח כי G אינו דקדוק $LR(k)$ ונוכיח כי התנאי לא מתקיים.

הדקדוק הוא לא דקדוק $LR(k)$ ולכן קיימות שתי גזירות בדקדוק המורחב:

1. $S' \Rightarrow_R^* \alpha A w \Rightarrow_R \alpha\beta w$
2. $S' \Rightarrow_R^* \gamma B x \Rightarrow_R \gamma\delta x = \alpha\beta y$
3. $FIRST_k(w) = FIRST_k(y) = u$

אבל $\alpha A y \neq \gamma B x$. על פי הלמה מההרצאה הקודמת, ניתן להניח $|\gamma\delta| \geq |\alpha\beta|$

תהי $\alpha_1 A_1 y_1$ התבנית הפסוקית הימנית האחרונה בגזירה $S' \Rightarrow_R^* \gamma B x$ כך ש $|\alpha_1| \leq |\alpha\beta|$.

אזי: $S' \Rightarrow_R^* \alpha_1 A_1 y_1 \Rightarrow \alpha_1 \beta_1 \beta_2 y_1 \Rightarrow_R^* \alpha_1 \beta_1 y = \alpha\beta y$ כאשר $\alpha_1 \beta_1 = \alpha\beta$.

בגזירה $\beta_2 y_1 \Rightarrow_R^* y$ לא משתמשים ב ε גזירות שמופעלות על המשתנה הראשון בשלב האחרון, כי במקרה הזה, $\alpha_1 A_1 y_1$ לא יכול להיות התבנית הפסוקית הימנית האחרונה שבגזירה $S' \Rightarrow_R^* \gamma B x$ שמקיימת $|\alpha_1| \leq |\alpha\beta|$. למה?

במקרה הזה התבנית הפסוקית הימנית האחרונה שאיננה ארוכה מ $\alpha\beta$ היא $\alpha_1 \beta_1$.

לכן $u = FIRST_k(y) \in EFF_k(\beta_2 y_1)$

תזכורת:
נאמר שהפריט $[A \to \beta_1.\beta_2, u]$ הוא **<u>תקף</u>** עבור רישא חיוני, $\alpha\beta_1$, אם קיימת גזירה:
$S \Rightarrow_R^* \alpha A w \Rightarrow_R \alpha\beta_1\beta_2 w$, כך ש: $u = FIRST_k(w)$.

במקרה שלנו:
$S' \Rightarrow_R^* \alpha_1 A_1 y_1 \Rightarrow \alpha_1\beta_1\beta_2 y_1$
נסמן: $v = FIRST_k(y_1)$. אזי הפריט $[A_1 \to \beta_1.\beta_2, v]$ הוא תקף עבור $\alpha_1\beta_1 = \alpha\beta$.

בנוסף:
$S' \Rightarrow_R^* \alpha A w \Rightarrow_R \alpha\beta w$, $FIRST_k(w) = u$
לכן הפריט $[A \to \beta., u]$ הוא גם תקף עבור $\alpha\beta$.

נשאר להוכיח כי $A \to \beta. \neq A_1 \to \beta_1.\beta_2$

מכיוון ש $v = FIRST_k(y_1)$ נקבל ש $EFF(\beta_2 y_1) = EFF(\beta_2 v)$.
כלומר: $FIRST_k(y) = u \in EFF(\beta_2 y_1) = EFF(\beta_2 v)$

נניח בשלילה ש $A \to \beta. = A_1 \to \beta_1.\beta_2$
נקבל: $\beta_1 = \beta$. מכיוון ש $\alpha\beta = \alpha_1\beta_1$ זה אומר ש $\alpha = \alpha_1$.
בנוסף $A = A_1$.

אזי: $S' \Rightarrow_R^* \alpha_1 A_1 y \Rightarrow \alpha_1\beta y$ למה?
לכן $\alpha_1 = \alpha = \gamma$, $A_1 = A = B$ ו $x = y$ למה?
וזאת בסתירה להנחה ש $\alpha A y \neq \gamma B x$.

לכן $A \to \beta. \neq A_1 \to \beta_1.\beta_2$ ולכן התנאי של המשפט לא מתקיים.
(הראנו שאם הדקדוק הוא לא דקדוק $LR(k)$ אז קיימים שני פריטים תקפים שונים עבור $\alpha\beta$, כך ש $u \in EFF_k(\beta_2 v)$)

הגדרה: יהי G דקדוק חסר הקשר ויהי γ רישא חיוני של G. נסמן ע"י $V_k(\gamma)$ את הקבוצה של פרטי $LR(k)$ שהם תקפים עבור γ.

נגדיר את הקבוצה C^G ע"י:

$C^G = \{V_k(\gamma) \mid \text{G הוא רישא חיוני של } \gamma\}$

כלומר C^G הוא אוסף של קבוצות של פריטי $LR(k)$ התקפים עבור G.

<u>בניית קבוצות $V_k(\gamma)$:</u>

הבניה מתבצעת באינדוקציה על γ.

$G=(V,T,P,S)$, $\gamma \in (V \cup T)^*$

בסיס: $|\gamma|=0$, כלומר $\gamma=\varepsilon$.

נגדיר סדרה $\{V_i^\varepsilon\}$ של קבוצות של פריטים תקפים באופן הבא:

$$V_0^\varepsilon = \{[S \to .\alpha, \varepsilon] \mid S \to \alpha \in P\}$$

$$V_{i+1}^\varepsilon = V_i^\varepsilon \cup \{[B \to .\beta, x] \mid [A \to .B\alpha, u] \in V_i^\varepsilon \wedge B \to \beta \in P \wedge x \in FIRST_k(\alpha u)\}$$

מכיוון ש $V_i^\varepsilon \subseteq V_{i+1}^\varepsilon$ ויש מספר סופי של פרטי $LR(k)$, הסדרה:

$V_0^\varepsilon, V_1^\varepsilon, \ldots$ היא סדרה סופית.

כלומר קיים i כך ש $V_i^\varepsilon = V_{i+1}^\varepsilon$ ולכן לכל $j>i$ מתקיים $V_i^\varepsilon = V_j^\varepsilon$.

<u>משפט</u>: יהי V_e^ε האיבר המקסימאלי של הסדרה $V_0^\varepsilon, V_1^\varepsilon, \ldots$. אזי $V_e^\varepsilon = V_k(\varepsilon)$.

דוגמה: $k=1$ $\quad \begin{array}{l} S' \to S \\ S \to SaSb \mid \varepsilon \end{array}$

$$V_0^\varepsilon : [S' \to .S, \varepsilon]$$

$$V_1^\varepsilon : [S' \to .S, \varepsilon], [S \to .SaSb, \varepsilon], [S \to .\varepsilon, \varepsilon]$$

$$V_2^\varepsilon : [S' \to .S, \varepsilon], [S \to .SaSb, \varepsilon], [S \to ., \varepsilon], [S \to .SaSb, a], [S \to ., a]$$

$$V_3^\varepsilon = V_2^\varepsilon$$

לכן: $V_k(\varepsilon) = V_2^\varepsilon = \{[S' \to .S, \varepsilon], [S \to .SaSb, \varepsilon / a], [S \to .\varepsilon, \varepsilon / a]\}$

<u>הוכחת המשפט:</u>

צריך להוכיח ש $V_e^{\varepsilon} = V_k(\varepsilon)$, כלומר $V_e^{\varepsilon} \subseteq V_k(\varepsilon)$ וגם $V_e^{\varepsilon} \supseteq V_k(\varepsilon)$

נראה $V_e^{\varepsilon} \subseteq V_k(\varepsilon)$:

מספיק להוכיח כי עבור כל i מתקיים $V_i^{\varepsilon} \subseteq V_k(\varepsilon)$

נוכיח את הטענה האחרונה באינדוקציה על i:

בסיס: $i=0$: $V_0^{\varepsilon} = \{[S \to .\alpha, \varepsilon] \mid S \to \alpha \in P\}$

צריך להראות ש $[S \to .\alpha, \varepsilon]$ הוא פריט $LR(k)$ תקף עבור ε.

תזכורת:

נאמר שהפריט $[A \to \beta_1.\beta_2, u]$ הוא **<u>תקף</u>** עבור רישא חיוני, $\alpha\beta_1$, אם קיימת גזירה:

$S \Rightarrow_R^* \alpha A w \Rightarrow_R \alpha\beta_1\beta_2 w$, כך ש: $u = FIRST_k(w)$.

במקרה שלנו: $S \Rightarrow \varepsilon\alpha \overbrace{\varepsilon}^{w}$ ואכן $\varepsilon = FIRST_1(\varepsilon)$.

צעד האינדוקציה: אם $[A \to .B\alpha, u] \in V_i^{\varepsilon}$ וגם $B \to \beta \in P$ וגם $x \in FIRST_k(\alpha u)$ אז

צריך להוכיח ש $[B \to .\beta, x] \in V_k(\varepsilon)$, כלומר ש $[B \to .\beta, x]$ הוא פריט $LR(k)$ תקף עבור ε.

על פי הנחת האינדוקציה $[A \to .B\alpha, u] \in V_k(\varepsilon)$ כלומר $[A \to .B\alpha, u]$ הוא פריט $LR(k)$ תקף עבור ε.

לכן קיימת הגזירה: $S \Rightarrow_R^* \varepsilon A w' \Rightarrow_R \varepsilon B\alpha w'$ וגם $u = FIRST_k(w')$. אם נסמן $w' = uw$ נקבל:

$S \Rightarrow_R^* \varepsilon A u w \Rightarrow_R \varepsilon B\alpha u w$

נמשיך את הגזירה באמצעות $B \to \beta \in P$ ונקבל: $S \Rightarrow_R^* \varepsilon A u w \Rightarrow_R \varepsilon B\alpha u w \Rightarrow \varepsilon\beta\alpha u w$.

מכיוון ש $x \in FIRST_k(\alpha u)$ זה אומר שניתן להמשיך את הגזירה ולהחליף את $\alpha u w$ ב xy עבור מילה של טרמינלים $y \in T^*$ כלשהי. כלומר: $S \Rightarrow_R^* \varepsilon A u w \Rightarrow_R \varepsilon B\alpha u w \Rightarrow \varepsilon\beta\alpha u w \Rightarrow_R^* \varepsilon\beta x y$.

נראה שיש כאן גזירה $B\alpha u w \Rightarrow \varepsilon\beta\alpha u w$ שהיא לא ימנית ביותר.

אם נבצע גזירה ימנית ביותר נקבל: $S \Rightarrow_R^* \varepsilon B\alpha u w \Rightarrow_R^* \varepsilon B x y \Rightarrow_R \varepsilon\beta x y$

לכן $[B \to .\beta, x]$ הוא פריט תקף עבור ε, כלומר $[B \to .\beta, x] \in V_k(\varepsilon)$.

נשאר להוכיח כי: $V_k(\varepsilon) \subseteq V_e^{\varepsilon} = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i^{\varepsilon}$

אם $[A \to .\alpha, u] \in V_k(\varepsilon)$ אזי: $S \Rightarrow_R^* \varepsilon A w \Rightarrow_R \varepsilon \alpha w$ כאשר $u = FIRST_k(\omega)$

כלומר קיים i כך ש: $S \Rightarrow_R^i \varepsilon A w \Rightarrow_R \varepsilon \alpha w$.

נוכיח באינדוקציה על i כי $[A \to .\alpha, u] \in V_i^{\varepsilon}$

בסיס: $i = 0$: קיימת הגזירה: $S \Rightarrow_R^0 \varepsilon S w \Rightarrow \varepsilon \alpha w$ $(S = A)$

מכיוון שהצעד הראשון הוא צעד ריק, זה אומר ש $w = \varepsilon$ כי בעצם לא ביצענו שום גזירה.

לכן הגזירה היא בעצם: $S \Rightarrow_R^0 \varepsilon S \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \alpha \varepsilon$ ומתקיים $u = \varepsilon = FIRST_k(\omega) = FIRST_k(\varepsilon)$

אם קיימת הגזירה $S \Rightarrow_R^0 \varepsilon S \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \alpha \varepsilon$ זה אומר ש $S \to \alpha \in P$

על פי ההגדרה: $V_0^{\varepsilon} = \{[S \to .\alpha, \varepsilon] \mid S \to \alpha \in P\}$

לכן $[S \to .\alpha, \varepsilon] \in V_0^{\varepsilon}$ כלומר $[A \to .\alpha, u] \in V_0^{\varepsilon}$

צעד: נניח כי אם $i \le n$ אז $[A \to .\alpha, u] \in V_i^{\varepsilon}$ ונראה שזה מתקיים גם עבור $i = n+1$.

יהי $[B \to .\beta, x]$ פריט $LR(k)$ תקף עבור ε, כלומר $[B \to .\beta, x] \in V_k(\varepsilon)$ כך ש:

$S \Rightarrow_R^{i+1} \varepsilon B x w \Rightarrow_R \varepsilon \beta x w$ וגם $x = FIRST_k(xw)$.

תהי $A \to B\alpha$ הגזירה האחרונה ב $S \Rightarrow_R^{i+1} Bxw$ שיוצרת את B הנ"ל.

אזי: $S \Rightarrow_R^* A\gamma y \Rightarrow_R^* Auw' \Rightarrow_R B\alpha uw' \Rightarrow_R^* Bxw$ כאשר $u = FIRST_k(uw')$.

מספר פעולות הגזירה כאן הוא $i+1$ ולכן מספר פעולות עד הגזירה של Auw' הוא לכל היותר i כי אחר כך בטוח מתבצעת הגזירה $Auw' \Rightarrow B\alpha uw'$.

בנוסף $\gamma y \Rightarrow_R^* uw'$ ו $\alpha uw' \Rightarrow_R^* xw$.

(לכן $x \in FIRST_k(\alpha uw')$ ומכיוון ש $u = FIRST_k(uw')$ זה אומר ש $x \in FIRST_k(\alpha u)$)

כלומר קיבלנו: $S \Rightarrow_R^{\le i} Auw' \Rightarrow_R B\alpha uw'$

לכן $[A \to .B\alpha, u]$ הוא פריט $LR(k)$ תקף עבור הרישא החיוני ε ולכן $[A \to .B\alpha, u] \in V_k(\varepsilon)$.

מכיוון שהגזירה $S \Rightarrow_R^{\le i} Auw' \Rightarrow_R B\alpha uw'$ התבצעה לכל היותר ב i גזירות, זה אומר שאפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה, כלומר $[A \to .B\alpha, u] \in V_i^{\varepsilon}$.

לכן על פי הגדרת V_{i+1}^{ε}:

$$V_{i+1}^{\varepsilon} = V_i^{\varepsilon} \cup \{[B \to .\beta, x] \mid [A \to .B\alpha, u] \in V_i^{\varepsilon} \wedge B \to \beta \in P \wedge x \in FIRST_k(\alpha u)\}$$

מתקיים $[B \to .\beta, x] \in V_{i+1}^{\varepsilon}$ וזה מה שרצינו להוכיח.