בעיית ההתאמה של פוסט

הגדרה:

מערכת התאמה מחולפת היא זוג $P'=(P,(x,y))$ כאשר P הינה מערכת התאמה ו $(x,y)\in P$.

התאמה ב P' הינה מילה w כך שקיימים $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\dots,(u_n,v_n)\in P$ ו $n\ge 0$ כך שמתקיים:

$$w=xu_1u_2\dots u_n=yv_1v_2\dots v_n$$

כלומר, התאמה כמו התאמה ב P רק שהזוג הראשון חייב להיות הזוג (x,y).

נוכיח שלכל מערכת התאמה מוחלפת P' קיימת מערכת התאמה P כך שבאחת יש התאמה אם ורק אם יש התאמה בשניה.
נציג מכונת טיורינג שבהינתן מערכת התאמה מוחלפת P' בונה את מערכת ההתאמה P המתאימה.
כתוצאה מכך, נקבל שאם בעיית ההתאמה המוחלפת לא ניתנת להכרעה אז בעיית ההתאמה המקורית לא ניתנת להכרעה.

נתונה מערכת התאמה מוחלפת $P_1'=(P_1,(x,y))$. נבנה מערכת התאמה P_2 שיש בה התאמה אם ורק אם יש ב P_1' התאמה.

נניח $P_1\subseteq\Sigma^+\times\Sigma^+$, $x,y\in\Sigma^+$ ונבחר שני סימנים שלא שייכים לאלפבית הזה: $*,\$\notin\Sigma$

למילה $w=a_1a_2\dots a_n\in\Sigma^+$ נגדיר:

$L(w)=*a_1*a_2*\dots*a_n$ כלומר, הפעלת הפונקציה L על מילה w דוחפת * משמאל לכל אות ב w.

$R(w)=a_1*a_2*\dots*a_n*$ כלומר, הפעלת הפונקציה R על מילה w דוחפת * מימין לכל אות ב w.

נגדיר: $P_2=\{(R(u),L(v))\mid(u,v)\in P_1\}\cup\{(L(x)*,L(y)),(\$,*\$)\}$

כיוון ראשון: התאמה במערכת ההתאמה המוחלפת P_1' גוררת התאמה במערכת ההתאמה P_2:

נניח כי w היא מילת התאמה ב P_1', כלומר קיימת סדרה $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\dots,(u_n,v_n)\in P$ ו $n\ge 0$ כך שמתקיים: $w=xu_1u_2\dots u_n=yv_1v_2\dots v_n$

נקבל שהמילה $L(w)*\$$ היא התאמה ב P_2.

הסדרה שתתקבל היא:

$$(L(x)*,L(y)),(R(u_1),L(u_1)),(R(u_2),L(u_2)),\dots,(R(u_n),L(u_n)),(\$,*\$)$$

דוגמה:

$\Sigma=\{a,b\}$ $\quad P_1=\{(ab,a),(a,ba)\}$ $\quad (x,y)=(ab,a)$

$$w=aba=ab\underline{a}=a\underline{ba}$$

נקבל שהסדרה היא (a,ba) ו $n=1$.

$$P_2=\{(a*b*,*a),(a*,*b*a)\}\cup\{(*a*b*,*a),(\$,*\$)\}$$

$$L(w)*\$=*a*b*a*\$=*a*b*\underline{a*}\$=*a\underline{*b*a*}\$$$

כלומר, הסדרה המתאימה ב P_2 היא: $(*a*b*,*a),(a*,*b*a),(\$,*\$)$

כיוון שני: התאמה במערכת ההתאמה P_2 גוררת התאמה במערכת ההתאמה המוחלפת P_1':
תהי $(u_0',v_0')(u_1',v_1'),\dots,(u_k',v_k')$ סדרה שמייצגת התאמה ב P_2.
תזכורת: $P_2=\{(R(u),L(v))\mid(u,v)\in P_1\}\cup\{(L(x)*,L(y)),(\$,*\$)\}$

מכיוון שכל האיברים השמאליים מלבד האיבר $L(x)*$ ב P_2 לא מתחילים *
וכל האיברים הימניים ב P_2 כן מתחילים ב *, מתחייב ש $u_0'=L(x)*$.
בן הזוג הימני היחיד של $L(x)*$ הוא $L(y)$. לכן הזוג הראשון הוא $(u_0',v_0')=(L(x)*,L(y))$

מכיוון שכל האיברים השמאליים ב P_2 מלבד האיבר $\$$ מסתיימים ב *
וכל האיברים הימניים ב P_2 לא מסתיימים ב * מתחייב ש $u_k'=\$$
בן הזוג היחיד של $\$$ הוא $*\$$. לכן הזוג האחרון הוא $(u_k',v_k')=(\$,*\$)$

מכיוון ש $\$$ מופיע רק בזוג $(\$,*\$)$, אפשר להניח ש (u_k',v_k') הוא הזוג היחיד בסדרה שמופיע בו $\$$.
(אחרת אפשר לחלק את הסדרה לכמה תתי סדרות, שכל אחת מהן נותנת התאמה).

אם $u_0',\dots u_{i-1}'$ נגמר ב * ו $v_0',\dots v_{i-1}'$ לא נגמר ב *, אז u_i' חייב להיות $R(u_{iz})$ (כדי לא להתחיל ב *) ו v_i' חייב להיות $L(v_{iz})$ (כדי **כן** להתחיל ב * ושההמשך יתאים ל $R(u_{iz})$).
קיבלנו שגם $u_0',\dots u_i'$ נגמר ב * ו $v_0',\dots v_i'$ לא נגמר ב *.
מכיוון שהתנאי הזה מתקיים עבור $i=1$, כי $(u_0',v_0')=(L(x)*,L(y))$ כלומר, הצד השמאלי נגמר בכוכבית והצד הימני לא, נקבל שלכל i בתחום $1\le i\le k-1$ מתקיים שהזוג (u_i',v_i') חייב להיות מהצורה $(R(u_i),L(v_i))$.

לכן $w=L(x)*R(u_{i1})R(u_{i2})\dots R(u_{ik-1})\$=L(y)L(v_{i1})L(v_{i1})\dots L(v_{ik-1})*\$$
אם "נמחק" את הכוכביות ואת ה $\$$, נקבל את הסדרה: $z=xu_{i1}u_{i2}\dots u_{ik-1}=yu_{i1}u_{i2}\dots u_{ik-1}$
לכן אם יש התאמה ב P_2 אז יש התאמה ב P_1'.

דוגמה:
$\Sigma=\{a,b\}$ $\quad P_1=\{(ab,a),(a,ba)\}$ $\quad (x,y)=(ab,a)$
לכן: $P_2=\{(a*b*,*a),(a*,*b*a)\}\cup\{(*a*b*,*a),(\$,*\$)\}$
המילה: $w=*a*b*a*\$=*a*b*\underline{a*}\$=*a\underline{*b*a}*\$$ היא התאמה במערכת ההתאמה P_2.
על ידי מחיקת כל הכוכביות וה-$, נקבל את המילה: $z=aba=ab\underline{a}=a\underline{ba}$ והיא מהווה התאמה במערכת ההתאמה המוחלפת P_1'.

משפט: בעיית ההתאמה של פוסט לא ניתנת להכרעה.
נראה רדוקציה מבעיית ההתאמה המוחלפת לבעיית העצירה, HP, שכידוע מהקורס חישוביות, לא ניתנת להכרעה.
כלומר, בהינתן מכונת טיורינג M ומילה w, נראה אלגוריתם (מכונת טיורינג), המייצרת מהזוג (M,w) מערכת התאמה מוחלפת P_1' כך שבמערכת P_1' יש התאמה אם ורק אם M עוצרת על w.

נניח שהמכונה M מיוצגת על ידי: $M=(K,\Sigma,\delta,s,h)$ כאשר:
K הוא אוסף כל המצבים של M.
$s\in K$ - מצב התחלתי של המכונה.
$h\notin K$ - מצב סופי של המכונה.
Σ היא הא"ב של M (אותיות הקלט ואותיות "העבודה" והאות הריקה).
נניח ש $(K\cup\{h\})\cap\Sigma=\phi$, כלומר, יש הפרדה בין המצבים לבין האותיות.
$\delta:K\times\Sigma\to(K\cup\{h\})\times(\Sigma\cup\{R,L\})$ - פונקצית המעברים של M - נניח שבהינתן מצב ואות, המכונה בוחרת בין שתי אפשרויות - או לכתוב ולא להזיז את הראש הקורא / כותב, או להזיז את הראש הקורא / כותב (ימינה או שמאלה על הסרט) אבל לא לכתוב כלום על הסרט. (מניחים שזה לא פוגם בכוחה של המכונה - צריך להוכיח שזה שקול למודל הרגיל של מכונת טיורינג)

תהי $(q,u\underline{a}v)$ תצורה של המכונה M.
כלומר, אם המכונה נמצאת בתצורה $(q,u\underline{a}v)$ אז היא נמצאת במצב q ועל הסרט רשום uav כאשר משמאל לראש הקורא / כותב רשומה המילה u, מימין לראש רשומה המילה v ומול הראש רשומה האות a.
נניח שהמכונה מתחילה מהמצב s כאשר משמאל למילה w מופיעה האות המיוחדת # ומימין למילה w מופיעה גם האות המיוחדת # והראש הקורא כותב נמצא על ה # הזאת.
כלומר, התצורה ההתחלתית של המכונה M היא: $(s,\#w\underline{\#})$.
נתאים לתצורה $(q,u\underline{a}v)$ מילה $uaqv\in\Sigma^+K\Sigma^*$. זוהי התאמה חד ערכית.

האלגוריתם:
האלפבית של מערכת ההתאמה המוחלפת הינו: $\Sigma\cup K\cup\{*,h\}$
כאשר * הינו סימן חדש, כלומר $*\neq h$ ו $\{*\}\cap K=\{*\}\cap\Sigma=\phi$.

הזוג הראשון הינו: $(x,y)=(*,*\#w\#s*)$ כלומר: $P_1'=(P,(*,*\#w\#s*))$
מערכת ההתאמה P מורכבת מקבוצות הזוגות הבאות:
קבוצה 0: הזוג הראשון: $(x,y)=(*,*\#w\#s*)$
קבוצה 1: $\{(\sigma,\sigma)\mid\sigma\in\Sigma\cup\{*\}\}$
קבוצה 2: לכל $q\in K$, $p\in K\cup\{h\}$, $a,b\in\Sigma$
$\{(aq,bp)\mid\delta(q,a)=(p,b)\}$ - החלפת אות מול הראש.
$\{(aqb,abp)\mid\delta(q,a)=(p,R)\}$ - הזזת הראש ימינה.
$\{(aq*,a\#p*)\mid\delta(q,a)=(p,R)\}$ - הזזת הראש ימינה למקום חדש.
$\{(aq,pa)\mid\delta(q,a)=(p,L)\}$ - הזזת הראש שמאלה
קבוצה 3: $\{(ahb,h),(ah,h)(ha,h)\}$ עבור כל $a,b\in\Sigma$
קבוצה 4: $\{(h**,*)\}$

הגדרה:

תהי $P_1=(P,(u,v))$ מערכת התאמה של פוסט מוחלפת.

זוג המילים (x,y) נקרא **התאמה חלקית** אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. קיימת מילה z כך ש $xz=y$ (כלומר, x היא רישא של y)
2. קיימת סדרת זוגות $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\dots,(u_n,v_n)\in P$ כך שמתקיים:
   - א. $uu_1u_2\dots u_n=x$
   - ב. $vv_1v_2\dots v_n=y$

z נקראת **השארית של** (x,y).

למה:

אם $(s,\#w\underline{\#})\vdash(q_1,w_1\underline{a_1}v_1)\vdash\dots\vdash(q_k,w_k\underline{a_k}v_k)$ אזי קיימת התאמה חלקית (x,y) כאשר

$$x=*\#w\#s*w_1a_1q_1v_1*\dots*w_{k-1}a_{k-1}q_{k-1}v_{k-1}*$$

$$y=*\#w\#s*w_1a_1q_1v_1*\dots*w_{k-1}a_{k-1}q_{k-1}v_{k-1}*w_ka_kq_kv_k*$$

בנוסף לכך, עבור כל התאמה חלקית אחרת (x',y') כך ש $|y|=|y'|$ מתקיים:

$x=x'$ וגם $y=y'$.

נוכיח זאת באינדוקציה על k

בסיס: עבור $k=0$ קיימת לנו ההתאמה החלקית המכילה את הזוג מקבוצה 0: $(x,y)=(*,*\#w\#s*)$

צעד: נניח שהטענה נכונה עבור k ונוכיח אותה עבור $k+1$.

$$(x,y)=\begin{pmatrix}*\#w\#s*w_1a_1q_1v_1*\dots*w_{k-1}a_{k-1}q_{k-1}v_{k-1}*,\\ *\#w\#s*w_1a_1q_1v_1*\dots*w_{k-1}a_{k-1}q_{k-1}v_{k-1}*w_ka_kq_kv_k*\end{pmatrix}$$

השארית של ההתאמה החלקית היא $w_ka_kq_kv_k*$.

נסמן: $w_ka_kq_kv_k*=\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_mq_k\tau_1\tau_2\dots\tau_l$

כאשר σ_i-ים ו τ_i-ים הם תווים בודדים ולא מילים. $\sigma_m=a_k$

נבחר זוגות באופן הבא (והיחיד):

אם $\delta(q_k,\sigma_m)=(p,b)$ עבור $b\in\Sigma$ אז הדרך היחידה לבחור בצד שמאל את q_k היא באמצעות הזוג (σ_mq_k,bp) מתוך תת הקבוצה הראשונה בתוך קבוצה מספר 2 ב P.

לכן נבחר ברצף הזוגות:

$$(\sigma_1,\sigma_1),(\sigma_2,\sigma_2),\dots,(\sigma_{m-1},\sigma_{m-1}),(\sigma_mq_k,bp),(\tau_1,\tau_1),\dots(\tau_l,\tau_l)$$

אם $\delta(q_k,\sigma_m)=(p,R)$ כאשר $\tau_1=b\in\Sigma$ אז הדרך היחידה לבחור בצד שמאל את q_k היא באמצעות הזוג $(\sigma_mq_k\tau_1,\sigma_m\tau_1p)$ מתוך תת הקבוצה השניה בתוך קבוצה מספר 2 ב P.

לכן נבחר ברצף הזוגות:

$$(\sigma_1,\sigma_1),(\sigma_2,\sigma_2),\dots,(\sigma_{m-1},\sigma_{m-1}),(\sigma_mq_k\tau_1,\sigma_m\tau_1p),(\tau_2,\tau_2),\dots(\tau_l,\tau_l)$$

ובאופן דומה עבור שאר האפשרויות (איך בדיוק??.)

ניסיון לענות:

אם $\delta(q_k,\sigma_m)=(p,R)$ כאשר $\tau_1=\#$ אז הדרך היחידה לבחור בצד שמאל את q_k היא באמצעות הזוג $(\sigma_k q_m{}^*,\sigma_k\#p^*)$ מתוך תת הקבוצה השלישית בתוך קבוצה מספר 2 ב P.

לכן נבחר ברצף הזוגות: $(\sigma_1,\sigma_1),(\sigma_2,\sigma_2),\dots,(\sigma_{m-1},\sigma_{m-1}),(\sigma_k q_m{}^*,\sigma_k\#p^*)$

אם $\delta(q_k,\sigma_m)=(p,L)$ אז הדרך היחידה לבחור בצד שמאל את q_k היא באמצעות הזוג $(\sigma_m q_k,p\sigma_m)$ מתוך תת הקבוצה הרביעית בתוך קבוצה מספר 2 ב P.

לכן נבחר ברצף הזוגות:

$(\sigma_1,\sigma_1),(\sigma_2,\sigma_2),\dots,(\sigma_{m-1},\sigma_{m-1}),(\sigma_m q_k,p\sigma_m),(\tau_1,\tau_1),\dots(\tau_l,\tau_l)$

באופן זה, נקבל שההתאמה החלקית החדשה הינה: $(y,yw_{k+1}a_{k+1}q_{k+1}v_{k+1}{}^*)$

לכן, אם M לא עוצרת על w אז לכל התאמה חלקית (x,y) נקבל ש $|y|>|x|$.

לכן לא קיימת התאמה ב P_1' (כי כל התאמה היא בפרט התאמה חלקית, ואם היא התאמה חלקית ו $|y|\neq|x|$ אז היא לא התאמה).

אם M כן עוצרת על w אז בשלב מסוים נגיע למצב שההתאמה החלקית שנשארה היא $(y,yw_k a_k \boldsymbol{h} v_k{}^*)$, כלומר השארית היא $w_k a_k \boldsymbol{h} v_k{}^*$.

באמצעות זוגות מקבוצות 1 ו 3 נוכל לסלק את כל התווים מלבד את ה h ואת ה $*$.

כאשר השארית תישאר h^*, כלומר ההתאמה החלקית שנשארה היא: $(w',w'h^*)$, נוסיף את הזוג מקבוצה 4: $(h^{**},*)$ וכך נשלים את ההתאמה.

דוגמה: נניח שהשארית היא: $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 h\sigma_4{}^*$

נחסל אותה באופן הבא: $(\sigma_1,\sigma_1)(\sigma_2,\sigma_2),(\sigma_3 h\sigma_4,h),(*,*)$ כעת השארית היא $\sigma_1\sigma_2 h^*$

נמשיך "לחסל": $(\sigma_1,\sigma_1)(\sigma_2 h,h),(*,*)$ כעת השארית היא: $\sigma_1 h^*$

נמשיך "לחסל": $(\sigma_1 h,h),(*,*)$ כעת השארית היא: h^*

כעת נשתמש בזוג: $(h^{**},*)$ ונקבל התאמה.

לכן אם M עוצרת על w אז קיימת התאמה ב P_1'.

נניח בשלילה שקיים אלגוריתם המקבל כקלט מערכת התאמה P ועונה תוך זמן סופי, האם יש בה התאמה.

באמצעות האלגוריתם הזה נוכל להכריע את בעיית העצירה:

בהינתן מכונת טיורינג M ומילה w, נבדוק האם M עוצרת על w באופן הבא:

1. נבנה מערכת התאמה מוחלפת P_1' שיש בה התאמה אם ורק אם M עוצרת על w.
2. ממערכת ההתאמה המוחלפת P_1' נבנה מערכת התאמה P שיש בה התאמה אם ורק אם יש ב P_1' התאמה.
3. נריץ את האלגוריתם המובטח על P ונענה כמוהו.

מכיוון שידוע שבעיית העצירה לא ניתנת להכריע, נקבל שההנחה מוטעית, כלומר **לא קיים אלגוריתם המקבל כקלט מערכת התאמה ועונה תוך זמן סופי האם יש בה התאמה. כלומר, <u>בעיית העצירה של פוסט לא ניתנת להכרעה.</u>**