הגדרה: **<u>אוטומט חסום ליניארי</u>** הוא מ"ט לא דטרמיניסטית שמקיימת את כל התנאים הבאים:
1. האלפבית של הקלט מכיל שני סימנים מיוחדים: $¢$ ו $\$$.
$¢$ נקרא **סימן הקצה השמאלי**.
$\$$ נקרא **סימן הקצה הימני**.
2. המכונה איננה יכולה לזוז שמאלה מ $¢$ וימינה מ $\$$.
3. המכונה לא יכולה למחוק את $¢$ ואת $\$$ ולכתוב במקומם סימנים אחרים.

$¢$					$\$$

אם M הוא אוטומט חסום ליניארי $M=\left(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,¢,\$,F\right)$
נגדיר, $L\left(M\right)$ - השפה שמתקבלת ע"י M:

$$L\left(M\right)=\left\{w\in\left(\Sigma-\{¢,\$\}\right)^*\mid q_0,¢w\$\mid-\alpha q\beta,q\in F\right\}$$

כלומר ניתן להגיע למצב מקבל מהמילה $¢w\$$

משפט: תהי L שפה בעלת הקשר. אזי קיים אוטומט חסום ליניארית M שמקבל את L.
הוכחה: M פועל באופן הבא:
1. אם $w=\varepsilon$, אזי M עוצר במצב שלא מקבל.
2. כמו במקרה של שפות מטיפוס 0, M "מנחש" תתי מילה של תבנית פסוקית. לכל תת מילה β.
מנחש גזירה $\alpha\to\beta$ ומציב α במקום β. (הכיוון ההפוך מההוכחה לגבי שפה מטיפוס 0).
(אם $|\alpha|<|\beta|$, M מכסה את הרווחים שנתקבלו ע"י הזזת הקצוות של המילה).
משום שמדובר בשפות בעלות הקשר, אורך המילה המתקבלת לא גדול מין האורך של המילה המקורית.
לכן M לא יכול לצאת מחוץ ל $¢$ ו $\$$.

הערה: אם רוצים לשמור על w, משתמשים בשתי מסילות במקום שני סרטים.

משפט: יהי M אוטומט חסום ליניארית. אזי $L\left(M\right)-\{\varepsilon\}$ היא שפה בעלת הקשר.
הוכחה: נגדיר את הגזירות באופן הבא:

$$S\to\left[a,q_0¢a\right]A_1 \quad\mid\quad \left[a,q_0¢a\$\right]$$
$$A_1\to\left[a,a\right]A_1 \quad\mid\quad \left[a,a\$\right]$$

עבור כל $a\in\Sigma-\{¢,\$\}$.
הגזירות הנ"ל גוזרות שני העתקים של מילה. הדקדוק עושה סימולציה של M על ההעתק השני. אם M מקבל את המילה, הדקדוק מוחק את ההעתק השני.
הסימולציה של M מתבצעת באופן הבא:
אם $\left[\left(q,X\right),\left(p,Z,R\right)\right]\in\delta$ אז $\left[a,qX\right]\left[b,Y\right]\to\left[a,Z\right]\left[b,pY\right]$
אם $\left[\left(q,X\right),\left(p,Z,L\right)\right]\in\delta$ אז $\left[b,Y\right]\left[a,qX\right]\to\left[b,pY\right]\left[a,Z\right]$

מחיקת ההעתק השני: $q\in F$, $\left[a,qX\right]\to a$ $\quad b\left[a,X\right]\to ba$, $\quad\left[a,X\right]b\to ab$

הערה: $X,Y,Z\in\left(\{\varepsilon\}\cup\{¢\}\right)\left(\Sigma-\{¢,\$\}\right)\left(\{\varepsilon\}\cup\{c\$\}\right)$
כלומר אות אחת שאיננה סימן קצה קלט ומימינה (אולי) סימן קצה קלט ימני ומשמאלה (אולי) סימן קצה קלט שמאלי.

משפט: כל שפה בעלת הקשר היא שפה רקורסיבית, כלומר, ניתנת להכרעה.
הוכחה:
תהי L שפה בעלת הקשר, לכן קיים לה אוטומט חסום ליניארית המקבל אותה.
יהי $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,¢,\$,F)$ אוטומט חסום ליניארית המקבל את השפה L.
תהי w מילה. נראה כיצד להכריע האם $w\in L$:
נניח ש $|w|=n$.
ברור שיש רק $|\Gamma|^n\cdot|Q|\cdot n$ תצורות שונות של M על קלט באורך n. לכן אם $w\in L(M)$, היא מתקבלת בפחות מ $|\Gamma|^n\cdot|Q|\cdot n$ צעדים.
לכן מספיק להריץ את M על w למשך $|\Gamma|^n\cdot|Q|\cdot n$ צעדים, ואם הוא יקבל אז לקבל, ואחרת לדחות.

<u>משפט</u>: קיימת שפה רקורסיבית שאינה בעלת הקשר (ולא מכילה את ε).

למה: תהי $M_1,M_2,...,M_n,...$ מניה רקורסיבית של מכונות טיורינג שעוצרות על כל קלט.
(כלומר קיימת M שבהינתן i מחזירה קידוד של מ"ט M_i שעוצרת לכל קלט - לא מובטח שלכל מכונה M_t שעוצרת לכל קלט, קיים i שעבורו M פולטת את הקידוד של M_t)
אזי קיימת שפה רקורסיבית L כך שלכל i יתקיים: $L\neq L(M_i)$.
הוכחה: נגדיר: $L=\{a^i \mid a^i\notin L(M_i)\}$
ברור ש L שפה רקורסיבית כי עבור כל i ניתן לבדוק האם $a^i\in L(M_i)$ על ידי הרצת M_i על a^i.
לכן L היא שפה רקורסיבית.
בנוסף, לכל i מתקיים $L\neq L(M_i)$ כי $a^i\in L\Leftrightarrow a^i\notin L(M_i)$.

<u>הוכחת המשפט:</u> ברור שקיימת מניה רקורסיבית של כל השפות בעלות ההקשר. (ניתן לקודד סימנים וגזירות באותה הצורה שמקודדים מ"ט לצורך בנית מ"ט אוניברסאלית ואפשר למשל לסדר את השפות על פי מספר כללי הגזירה ואורכם בדקדוק שלהן).
לכן L המתאימה עבור מניה זאת היא שפה רקורסיבית שאינה בעלת הקשר.

<u>משפט</u> (סגירות **<u>לאיחוד</u>**): תהינה L_1,L_2 שפות חסרות הקשר. אזי $L=L_1\cup L_2$ היא גם כן שפה חסרת הקשר.
הוכחה: יהיו $G_1=(V_1,T_1,P_1,S_1)$, $G_2=(V_2,T_2,P_2,S_2)$ דקדוקים חסרי הקשר כך ש $L_1=L(G_1)$ ו $L_2=L(G_2)$.
בלי לפגוע בכלליות אפשר להניח כי $V_1\cap V_2=\phi$ (כלומר אין משתנים המשותפים לשתי השפות).
נגדיר את הדקדוק חסר ההקשר $G=(V,T,P,S)$ באופן הבא:

$$V=V_1\cup V_2\cup\{S\}$$
$$T=T_1\cup T_2$$
$$P=P_1\cup P_2\cup\{S\to S_1\mid S_2\}$$

נקבל ש $L(G)=L_1\cup L_2$.

<u>משפט</u>: שפות חסרות הקשר סגורות תחת **<u>שרשור</u>**.

הוכחה: : יהיו $G_1=(V_1,T_1,P_1,S_1)$, $G_2=(V_2,T_2,P_2,S_2)$ דקדוקים חסרי הקשר כך ש $L_1=L(G_1)$ ו $L_2=L(G_2)$.

צריך להוכיח שהשפה: $L=\{w_1w_2 \mid w_1\in L(G_1)\wedge w_2\in L(G_2)\}$ היא שפה חסרת הקשר.

כמו בהוכחת סגירות לאיחוד, נניח ש $V_1\cap V_2=\phi$. נגדיר את הדקדוק חסר ההקשר $G=(V,T,P,S)$ באופן הבא:

$$V=V_1\cup V_2\cup\{S\}$$
$$T=T_1\cup T_2$$
$$P=P_1\cup P_2\cup\{S\to S_1S_2\}$$

נקבל ש $L(G)=\{w_1w_2 \mid w_1\in L(G_1)\wedge w_2\in L(G_2)\}$

<u>משפט:</u> שפות חסרות הקשר סגורות תחת פעולת * (סגור של *Kleene*)

הוכחה: יהי $G_1=(V_1,T_1,P_1,S_1)$ דקדוק חסר הקשר כך ש $L_1=L(G_1)$.

נגדיר את הדקדוק חסר ההקשר $G=(V,T,P,S)$ באופן הבא: (נניח $S\notin V_1$)

$$V=V_1\cup\{S\}$$
$$T=T_1$$
$$P=P_1\cup\{S\to S_1S, S\to\varepsilon\}$$

(נגזור מ S מספר כלשהו של S_1 ומשם נמשיך באמצעות כללי הגזירה של G).

נקבל ש $L(G)$ היא אוסף של שרשורי מילים מתוך L_1.

<u>הגדרה</u>: יהיו Σ,Δ אלפבית-ים ותהי f העתקה חד-ערכית מ Σ לתתי קבוצות של Δ^*. כלומר פונקציה המקבלת אות ומחזירה שפה.

הרחבת ההגדרה: $f(\varepsilon)=\varepsilon$ ולכל $a\in\Sigma, w\in\Sigma^*$ נגדיר: $f(wa)=f(w)f(a)$.

עבור השפה $L\subseteq\Sigma^*$ נגדיר $f(L)=\bigcup_{x\in L}f(x)$.

נאמר כי $f(L)$ מתקבלת על ידי הצבה של $f(a)$ במקום a ב L לכל $a\in\Sigma$.

דוגמה: יהי $\Sigma=\{a_1,a_2\}$ ו Δ כלשהו כך ש $L_1,L_2\subseteq\Delta^*$.

נגדיר העתקה: $f(a_1)=L_1$, $f(a_2)=L_2$.

אם $L=\{a_1,a_2\}$ אז $f(L)=L_1\cup L_2=L_1+L_2$.

אם $L=\{a_1a_2\}$ אז $f(L)=\{w_1w_2 \mid w_1\in L_1\wedge w_2\in L_2\}=L_1L_2$.

אם $L=\{a_1\}^*$ אז $f(L)=(L_1)^*$

משפט: שפות חסרות הקשר סגורות תחת הצבה חסרת הקשר.
כלומר: אם $L \subseteq \Sigma^*$ שפה חסרת הקשר ולכל $a \in \Sigma$ $f(a) = L_a \subseteq \Delta^*$ היא שפה חסרת הקשר אזי $f(L)$ היא שפה חסרת הקשר.

הוכחה: תהי $L = L(G_L)$ כאשר $G_L = (V_L, T_L, P_L, S_L)$
ולכל $a \in \Sigma$ $f(a) = L_a = L(G_a)$ כאשר $G_a = (V_a, T_a, P_a, S_a)$
ניתן להניח כי כל קבוצות המשתנים של V_L ושל ה V_a-ים זרות בזוגות.
נגדיר את הדקדוק $G = (V, T, P, S)$ באופן הבא:

$$V = V_L \cup \bigcup_{a \in \Sigma} V_a$$

$$T = \bigcup_{a \in \Sigma} T_a$$

$$P = \left\{ \bigcup_{a \in \Sigma} P_a \right\} \cup \{ A \to f(\alpha) \mid A \to \alpha \in P_L \}$$

כאשר לכל $a \in \Sigma$ נגדיר $f(a) = S_a$ ולכל $A \in V$ נגדיר $f(A) = A$.

$$S = S_L$$

נקבל ש $f(L) = L(G)$ כנדרש. לכן $f(L)$ היא שפה חסרת הקשר.

דוגמה:
$\Sigma = \{a, b\}$, $L = L(G_L) \subseteq \Sigma^*$, כאשר $G_L = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$

$$P = \{ S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon \}$$

כלומר: $L = \{ w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \}$ (כלומר כל המילים שיש בהן אותו מספר של a-ים ו b-ים.

$$\Delta = \{0, 1, 2\}$$

$S_a \to 0S_a1 \mid 01$, כלומר: $L_a = \{ 0^n 1^n \mid n = 1, 2, 3, \ldots \}$

$S_b \to 0S_b0 \mid 2S_b2 \mid \varepsilon$, כלומר: $L_b = \{ ww^R \mid w \in \{0, 2\}^* \}$

אם $f(a) = L_a$ ו $f(b) = L_b$ אזי $f(L)$ נוצרת על ידי הדקדוק שכללי הגזירה שלו הם:

$$S \to S_a S S_b S \mid S_b S S_a S \mid \varepsilon$$

$$S_a \to 0S_a1 \mid 01$$

$$S_b \to 0S_b0 \mid 2S_b2 \mid \varepsilon$$

הגדרה: הצבה $f:\Sigma \to 2^{\Delta^*}$ (כאשר 2^{Δ^*} היא אוסף כל השפות מעל Δ) נקראת **<u>הומומורפיזם</u>** אם עבור כל $a \in \Sigma$ השפה $f(a)$ מכילה בדיוק מילה אחת.

משפט: שפות חסרות הקשר סגורות תחת הומומורפיזם.
הוכחה: לכל $a \in \Sigma$ נקבל ש $L_a = f(a)$ היא שפה בעלת מילה אחת ולכן סופית ולכן רגולרית ולכן חסרת הקשר ולכן ההצבה היא הצבה חסרת הקשר ולכן המשפט הקודם לגבי הצבות תקף גם כאן.

השפה: $\{a^l b^m c^n \mid l = m \vee m = n\}$
נוכיח ששפה זאת היא חסרת הקשר (ראינו בהרצאה 1) ואין לה דקדוק חד משמעי. (למת ניפוח).

הגדרה: יהי Σ אלפבית ו $w \in \Sigma^*$, כך ש $|\omega| = k$. יהי $1 \le i \le k$. אזי נאמר כי הסימן a נמצא במקום ה i אם $w = xay$ כך ש $|x| = i-1$.
משפט: הלמה של $Ogden$: יהי $G = (V,T,P,S)$ דקדוק חסר הקשר.
קיים $k \ge 1$ כך שלכל מילה $z \in L(G)$ המקיימת ש $|z| \ge k$ וגם k או יותר מקומות של z הם "מסומנים", אזי ניתן לרשום את z בצורה $z = uvwxy$ כך שמתקיים:
1. w מכילה לפחות מקום מסומן אחד.
2. או כל אחת מ u,v מכילה מקום מסומן, או כל אחת מ x,y מכילה מקום מסומן.
3. vwx מכילה לכל היותר k מקומות מסומנים.
4. קיים $A \in V$ כך ש $S \Rightarrow^* uAy \Rightarrow^* uvAxy \Rightarrow^* \ldots \Rightarrow^* uv^iAx^iy \Rightarrow^* uv^iwx^iy$ עבור כל i.

הוכחה: יהי m מספר המשתנים של V,
$l = \max\{|\alpha| \mid A \to \alpha \in P\}$ (האורך המקסימאלי של הצד הימני של גזירה כלשהי בדקדוק).
נגדיר: $k = l^{2m+3}$.
יהי T עץ גזירה של מילה z כך ש $|z| \ge k$ ולפחות k מקומות של z הם מסומנים.
הערה: T מכיל מסלול באורך $2m+3$ לפחות. (כי האורך של z הוא לפחות l^{2m+3} ובמעבר מעומק x לעומק $x+1$ מגדילים את האורך של התבנית הפסוקית לכל היותר פי l).

נסמן את העלים של T המתאימים למקומות המסומנים של z.
יהי n צומת של T. n נקרא צומת פיצול אם יש לו לפחות שני בנים בעלי צאצאים מסומנים.

נבנה מסלול $n_1, n_2, \ldots$ ב T שמקיים:
1. n הוא השורש של T.
נניח שבנינו את החלק $n_1, n_2, \ldots, n_i$ של המסלול.
2. אם ל n_i יש בדיוק בן אחד שהוא בעל צאצאים מסומנים, אזי n_{i+1} הוא אותו הבן.
3. אם הצומת n_i הוא צומת פיצול, אזי n_{i+1} הוא הבן של n_i שיש לו מספר צאצאים מסומנים גדול ביותר.
4. אם הצומת n_i הוא עלה, אז המסלול נגמר.

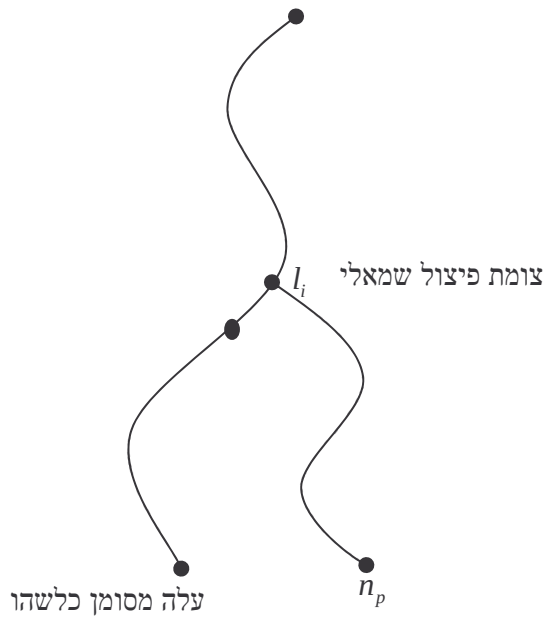
יהי $n_1, n_2, \ldots, n_p$ המסלול הנ"ל.
טענה: אם הקטע של המסלול $\{n_1, \ldots, n_i\}$ מכיל t צמתי פיצול, אזי ל n_{i+1} יש לפחות l^{2m+3-t} צאצאים מסומנים.
אנו נוכיח את הטענה באינדוקציה על i:

בסיס: $i=0$ אזי $t=0$ ועל פי ההגדרה ל n_1 שהוא השורש, יש לפחות $k=l^{2m+3}$ עלים מסומנים.
צעד האינדוקציה:
נניח שבקטע המסלול $\{n_1,...,n_{i-1}\}$ היו s צמתי פיצול, ושלצומת n_i יש לפחות l^{2m+3-s} צאצאים מסומנים.
אם n_i אינו צומת פיצול, אזי מספר הצאצאים המסומנים של n_{i+1} שווה למספר הצאצאים המסומנים של n_i ו $t=s$ ולכן מתקיים שמספר הצאצאים המסומנים של n_{i+1} הוא לפחות l^{2m+3-t}
אם n_i הוא כן צומת פיצול, אזי מספר הצאצאים המסומנים של n_{i+1} הוא לפחות $\frac{1}{l}$ של אלו של n_i ו $t=s+1$ לכן מתקיים שמספר הצאצאים המסומנים של n_{i+1} הוא לפחות:

$$\frac{l^{2m+3-s}}{l}=l^{2m-3-s-1}=l^{2m-3-(s+1)}=l^{2m-3-t}.$$

מכיוון שיש לפחות l^{2m+3} צאצאים מסומנים של n_1, המסלול $n_1,n_2,...,n_p$ מכיל לפחות $2m+3$ צמתי פיצול. (כי בכל מעבר מצומת פיצול לבנו, נפטרים לכל היותר מ $\frac{l-1}{l}$ מהבנים שלו, וכשמגיעים לעלה, צריכים להישאר עם צומת מסומן אחד לכל היותר).
n_p הוא עלה ולכן לא יכול להיות פיצול. לכן $p>2m+3$.

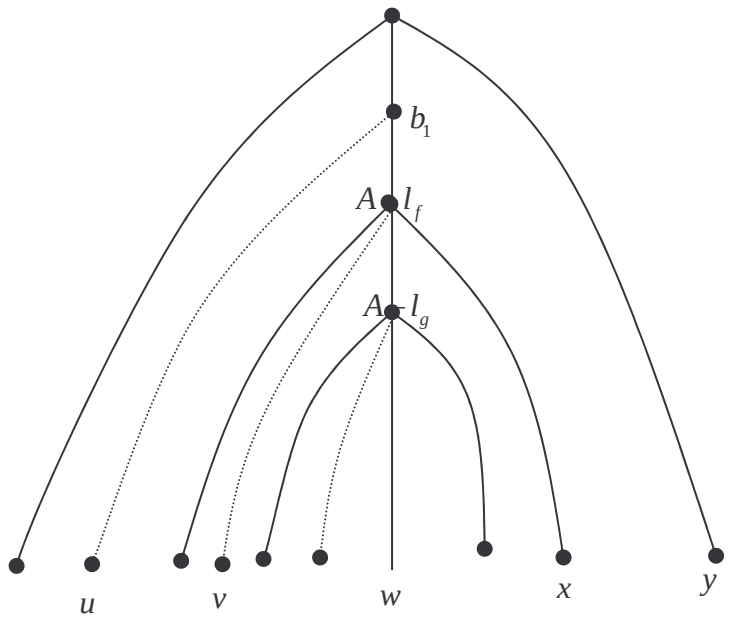
יהיו $l_1,l_2,...,l_{2m+3}$ צמתי הפיצול האחרונים של המסלול $n_1,n_2,...,n_p$
l_i יקרא צומת פיצול שמאלי, אם קיים לו בן שאינו שייך למסלול והוא בעל צאצא מסומן, שנמצא שמאלה מ n_p.



אחרת l_i נקרא צומת פיצול ימני.

אפשר להניח כי לפחות $m+2$ (כלומר יותר מחצי) מ $l_1,l_2,...,l_{2m+3}$ הם צמתי פיצול שמאליים (המקרה של פיצול ימני סימטרי לחלוטין).

יהיו $b_1,...,b_{m+2}$ צמתי פיצול שמאליים שהם האחרונים בין $l_1,l_2,...,l_{2m+3}$.
מכיוון שמספר המשתנים של V הוא m, קיימים שני צמתים בין $b_1,...,b_{m+2}$ (נסמנם ב l_g,l_f) שיש להם אותה התווית A. (כלומר הפיצול הוא באמצעות אותו כלל גזירה) נניח כי $f<g$.



תזכורת: צריך להוכיח:
1. w מכילה לפחות מקום מסומן אחד.
2. או כל אחת מ u,v מכילה מקום מסומן, או כל אחת מ x,y מכילה מקום מסומן.
3. vwx מכילה לכל היותר k מקומות מסומנים.
4. קיים $A\in V$ כך ש $S\Rightarrow^* uAy\Rightarrow^* uvAxy\Rightarrow^* ...\Rightarrow^* uv^iAx^iy\Rightarrow^* uv^iwx^iy$ עבור כל i.

ברור שמתקיימים התנאים 1,2.
תנאי 4 גם כן מתקיים: בקטע המסלול מ n_1 ועד ל l_f הראנו שניתן לגזור: $S\Rightarrow^* uAy$.
בקטע המסלול מ l_f ועד ל l_g הראנו שניתן לגזור: $A\Rightarrow^* vAx$ ובקטע מ l_g ועד n_p הראנו שניתן לגזור $A\Rightarrow^* w$. כלומר, סך הכל, ניתן לגזור לכל i את:
$S\Rightarrow^* uAy\Rightarrow^* uvAxy\Rightarrow^* ...\Rightarrow^* uv^iAx^iy\Rightarrow^* uv^iwx^iy$

נשאר להוכיח כי vwx מכילה לכל היותר k מקומות מסומנים.
מכיוון ש b_1 הוא צומת הפיצול ה- $2m+3$ מהסוף, יש לו לכל היותר $k=l^{2m+3}$ צאצאים מסומנים. (כי לצומת בתחתית העץ יש לכל היותר צאצא אחד מסומן, וכל פעם שעולים צעד אחד בעץ, מספר הצאצאים גדל לכל היותר פי l).
l_f הוא צאצא של b_1, לכן מספר הצאצאים המסומנים של l_f לא גדול ממספר הצאצאים המסומנים של b_1 - כלומר לכל היותר k. המילה vwx נבנית מתוך l_f ולכן יש בה לכל היותר k מקומות מסומנים.

למת הניפוח:
תהי L שפה חסר הקשר. קיים k כל שלכל $z\in L$ מתקיים שאם $|z|\ge k$ אזי $z=uvwxy$, $vx\ne\varepsilon$, $|vwx|\le k$ ועבור כל i מתקיים: $uv^iwx^iy\in L$.

הוכחה: ניקח את k כמו בלמה של *Ogden* ונסמן את כל המקומות של z.

דוגמה: השפה $L=\left\{a^i b^i c^i \mid i\geq 1\right\}$ איננה שפה חסרת הקשר.

הוכחה: נניח שהשפה L היא כן חסרת הקשר, ולכן קיים דקדוק חסר הקשר G, כך ש $L=L\left(G\right)$.

יהי k הקבוע המובטח מלמת הניפוח לשפות חסרות הקשר.

נתבונן ב $z=a^k b^k c^k \in L$.

נכתוב $z=uvwxy$ כך שהחלוקה הזאת של z מקיימת את למת הניפוח.

מכיוון ש $\left|vwx\right|\leq k$ המילה vwx לא מכילה את a,b,c ביחד. לכן $\#_b\left(uv^2wx^2y\right)\neq \#_a\left(uv^2wx^2y\right)$

או $\#_b\left(uv^2wx^2y\right)\neq \#_c\left(uv^2wx^2y\right)$.

מסקנה: שפות חסרות הקשר אינן סגורות תחת חיתוך.

הוכחת המסקנה:

השפות:

$$L_1=\left\{a^i b^i c^j \mid i,j\geq 1\right\}$$

$$L_2=\left\{a^i b^j c^j \mid i,j\geq 1\right\}$$

הן שפות חסרות הקשר, אבל החיתוך שלהן $L=L_1\cap L_2=\left\{a^i b^i c^i \mid i\geq 1\right\}$ איננה שפה חסרת הקשר.

מסקנה: שפות חסרות הקשר אינן סגורות תחת פעולת המשלים. זאת משום ש $L_1\cap L_2=\overline{\left(\overline{L_1}\cup\overline{L_2}\right)}$.

הראינו ששפות חסרות הקשר הן כן סגורות תחת פעולת איחוד, ולכן אם הן היו סגורות תחת פעולת משלים, היינו מקבלים שהן סגורות תחת פעולת חיתוך.