תזכורת

קיבול שיורי	זרימה
$u \xrightarrow{c(e)-f(e)} v$ $u \xleftarrow{f(e)} v$	$u \xrightarrow{f(e)/c(e)} v$

<u>גרף שיורי</u>: G_f - מכיל את כל הקשתות עם קיבול שיורי גדול ממש מאפס.

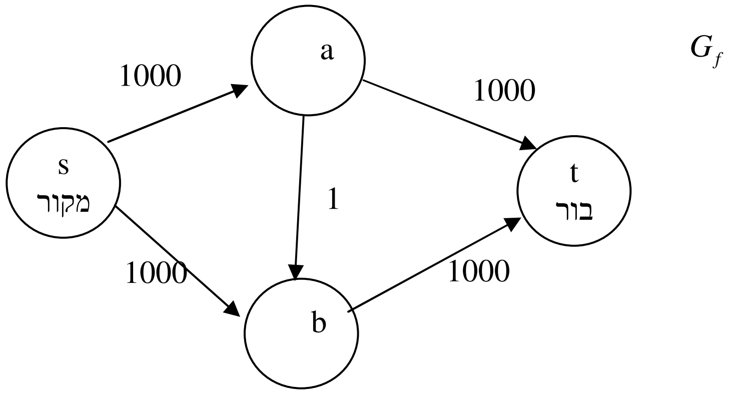
<u>מסלול שיפור</u>: מסלול ב G_f מ s (המקור) אל t (הבור).

אלגוריתם Ford – Fulkerson

1. מתחילים מזרימה 0 בכל הקשתות.
2. כל עוד יש מסלול שיפור ב G_f, אז משפרים עליו את הזרימה.

בעיות:

1. עבור קיבולים אי-רציונאליים האלגוריתם לא עוצר בהכרח.
2.



2000 איטרציות עבור בחירה גרועה של מסלולי שיפור. (סיבוכיות גרועה מאוד)

היום

- אלגוריתם Edmond Karp בסיבוכיות $O\left(|V||E|^2\right)$
- אלגוריתם של דיניץ בסיבוכיות $O\left(|V|^2|E|\right)$

אלגוריתם Edmond Karp

- נבחר מסלול שיפור קצר ביותר.

נסמן ב $\delta_f(v)$ את המרחק הקצר ביותר מ s אל v ב G_f.

<u>טענה</u>: $\delta_f(v)$ לא קטן לאורך פעולות השיפור.

<u>הוכחה</u>: נסמן ב f את הזרימה לפני השיפור וב f' את הזרימה אחרי השיפור. טענה: לכל צומת v מתקיים: $\delta_{f'}(v) \ge \delta_f(v)$ (ניסוח אחר של אותה טענה) נניח בשלילה שהטענה לא מתקיימת,

כלומר קיימת קבוצת צמתים מקסימאלית X כך ש $\forall x \in X: \delta_f(x) > \delta_{f'}(x)$. מביניהם נבחר את הצומת הכי קרוב ל s ב $G_{f'}$ ונקרא לו v.

נסתכל על המסלול: $s \to \dots \to u \to v$.

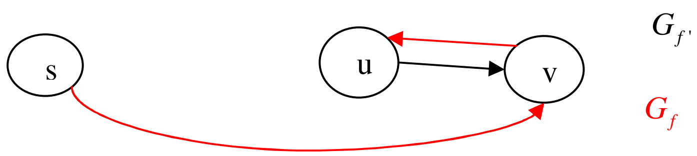
u הוא הצומת הקודם ל v על מסלול קצר ביותר מ s אל v ב $G_{f'}$. לכן u יותר קרוב ל s מ v ולכן $\delta_{f'}(u) \ge \delta_f(u)$ (כי $u \notin X$).

$$\delta_{f'}(v) = \delta_{f'}(u)+1$$

1. אם $v \to u$ נמצאת ב G_f אז $\delta_f(v) \underbrace{\le}_{*} \delta_f(u)+1 \underbrace{\le}_{**} \delta_{f'}(u)+1 = \delta_{f'}(v)$ בסתירה לכך ש $\delta_f(v) > \delta_{f'}(v)$.

* - כי יש מסלול מ s אל v דרך u.
** - בגלל ש $\delta_{f'}(u) \ge \delta_f(u)$.

2. אם $v \to u$ לא נמצאת ב G_f, (אבל כן נמצאת ב $G_{f'}$) אז המשמעות היא שמסלול השיפור עבר דרך הקשת $u \to v$ (הקשת ההפוכה)



$\delta_f(v) = \delta_f(u)-1 \underbrace{\le}_{**} \delta_{f'}(u)-1 = \delta_{f'}(v)-2 < \delta_{f'}(v)$ בסתירה לכך ש $\delta_f(v) > \delta_{f'}(v)$ - לפי בחירת u.

רוצים להראות סיבוכיות EK: $O\left(|V||E|^2\right)$. סיבוכיות כל איטרציה (מחשבים מסלול שיפור ומשפרים את הזרימה) $O(|E|)$ - הרצת BFS. נראה שמספר האיטרציות הוא $O(|V||E|)$.

הוכחה:

נגדיר: קשת קריטית היא קשת עם קיבול שיורי קטן ביותר על מסלול שיפור. נראה חסם על מסי' הפעמים שקשת $v \to u$ היא קשת קריטית. נסמן ב f את הזרימה בפעם הראשונה ש $v \to u$ היא קשת קריטית. לאחר פעולת השיפור, הקשת $v \to u$ נעלמת מהגרף השיורי. על מנת ש $v \to u$ תשוב ותופיע בגרף השיורי, צריך להיות מסלול שיפור דרך $u \to v$. נסמן את הזרימה במקרה זה ב f'.

$$(1)\ \delta_f(v) = \delta_f(u)+1 \text{ - } G_f: s \to \dots \to u \to v \to \dots \to t$$

$$(2)\ \delta_{f'}(u) = \delta_{f'}(v)+1 \text{ - } G_{f'}: s \to \dots \to v \to u \to \dots \to t$$

לפי הטענה הקודמת מתקיים: $\delta_f(v) \le \delta_{f'}(v)$ (3). נקבל:

$\delta_{f'}(u) \overset{(2)}{=} \delta_{f'}(v)+1 \overset{(3)}{\ge} \delta_f(v)+1 \overset{(1)}{=} \delta_f(u)+2$ ולכן: $\delta_{f'}(u) \ge \delta_f(u)+2$ כלומר, המרחק בין

s ל u גדל ב 2 לפחות בין f ל f'. <u>מסקנה:</u> קשת $u \to v$ יכולה להיות לכל היותר $\frac{|V|}{2}$ פעמים (כי אורך המסלול מ s ל u חסום ע"י $|V|$). בכל איטרציה יש לפחות קשת אחת שהיא קשת קריטית, ולכן מספר האיטרציות הוא $O(|V||E|)$.

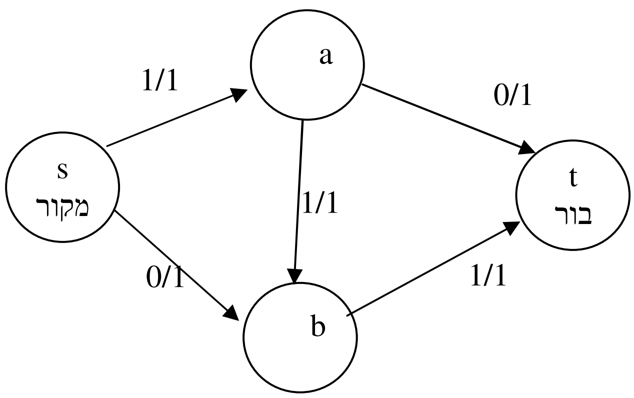
האלגוריתם של דיניץ

<u>הרעיון:</u> לנצל "טוב" יותר את הגרף השיורי – כלומר למצוא בו מספר מסלולי שיפור.

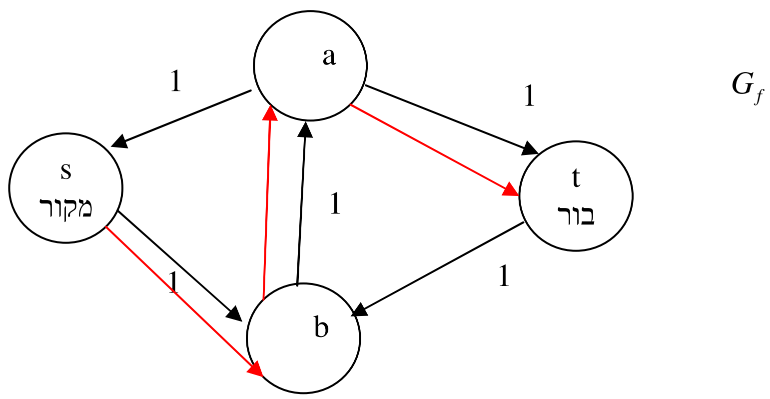
<u>גרף השכבות</u> L_f: מכיל את כל הקשתות במסלולים קצרים ביותר ב G_f ורק אותן, כלומר $v \rightarrow u$ כך ש $\delta_f(u)+1=\delta_f(v)$.

<u>זרימה חוסמת:</u> זרימה כך שכל מסלול מ s ל t מכיל לפחות קשת רוויה אחת. (רוויה = $f(e)=c(e)$).

דוגמה:



לא זרימת מקסימום בהכרח!



האלגוריתם של דיניץ עובר בפאזות (בשלבים):

f_i - הזרימה בתחילת הפאזה ה i

f_0 - זרימה 0 בכל הקשתות.

בפאזה ה i:

- חשב זרימה חוסמת q ב L_f
- מוסיפים את q ל f_i

האלגוריתם עוצר כשאין מסלול מ s אל t ב L_f.

(האלגוריתם מוצא זרימת מקסימום כי הוא עובד בשיטת FF, כלומר מוצא מסלול שיפור ומשפר את הזרימה לאורכו ועוצר כשאין מסלול שיפור).

<u>חישוב זרימה חוסמת:</u>

אלגוריתם נאיבי: נמצא מסלול שיפור ונשפר לאורכו את הזרימה – לפחות קשת אחת רוויה, כלומר נמחקת, ולכן $O(|E|)$.

נראה דרך יעילה יותר לחישוב זרימה חוסמת ב L_f:

כל עוד יש קשתות יוצאות מ s (ב L_f):

- נריץ DFS מ s למציאת מסלול ל t.
- אם מצאנו מסלול p נשפר לאורכו את הזרימה ונמחק קשתות עם קיבול שיורי 0 מ L_f.
- אם במהלך ה DFS נסוגים מצומת v אז מוחקים מ L_f את כל הקשתות הנכנסות אל v.

לאחר לכל היותר $|V|$ צעדים, או שמגיעים ל t (ואז נמחקות קשתות עם קיבול שיורי 0 לאחר השיפור) או שנסוגים מצומת v - ושוב מוחקים לפחות קשת אחת.

לכן סיבוכיות חישוב זרימה חוסמת היא $O(|V||E|)$.

נותר להראות שמספר הפאזות חסום ע"י $O(|V|)$:

נוכיח ע"י כך שנראה שהמרחק בין s ל t בגרף השיורי גדל ממש בין שתי פאזות.

<u>סימונים</u>:

f - הזרימה בתחילת הפאזה ה i.

f' - הזרימה בתחילת הפאזה ה $i+1$ (הלא אחרונה).

$\delta_f(a,b)$ - המרחק הקצר ביותר מ- a אל b ב G_f.

טענה: $\delta_f(s,t) < \delta_{f'}(s,t)$.

נסתכל על קשת $v \to u$ במסלול קצר ביותר p מ s אל t ב $G_{f'}$:

$G_{f'}: s \to \ldots \to u \to v \to \ldots \to t$

ישנן שתי אפשרויות:

1. (u,v) נמצאת ב G_f.
2. (u,v) לא נמצאת ב G_f.

1. אם כל הקשתות על p הן מהצורה הראשונה $G_f: s \xrightarrow[p]{} t$ אז p לא מסלול קצר ביותר ב G_f כי בכל מסלול כזה מרווים לפחות קשת אחת. לכן $\delta_{f'}(s,t) > \delta_f(s,t)$.
2. לא כל הקשתות ב p היו ב G_f:

נסמן ב $v \to u$ את הקשת מבין אלה שלא היו ב G_f הכי קרובה ל t:

$G_{f'}: \to \ldots \to u \to v \to t$

G_f

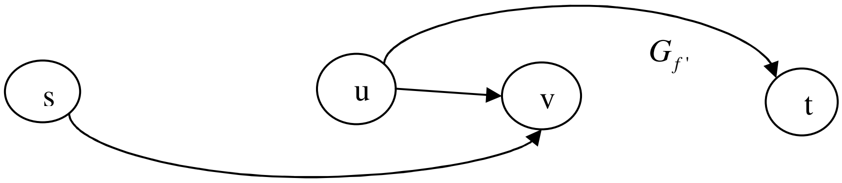
מסקנה:

$\delta_{f'}(v,t) \geq \delta_f(v,t)$ (1) כי כל הקשתות על תת המסלול של p בין v ל t נמצאות גם ב G_f.

$\delta_{f'}(s,v) \geq \delta_f(s,v)$ (2) כי כמו באנליזה של EK,אם עובדים עם מסלולים קצרים ביותר, המרחק של צומת מ s לא קטן.

$\delta_{f'}(s,t) = \delta_{f'}(s,u) + 1 + \delta_{f'}(v,t)$

$u \rightarrow v$ לא היתה ב ולכן היה מסלול שיפור (קצר ביותר) מ s אל t דרך הקשת $v \rightarrow u$:



$$\delta_f(s,t) = \delta_f(s,u) - 1 + \delta_f(v,t)$$

$$\delta_{f'}(s,t) = \delta_{f'}(s,u) + 1 + \delta_{f'}(v,t)$$

$$\Leftarrow \delta_{f'}(s,t) > \delta_f(s,t)$$