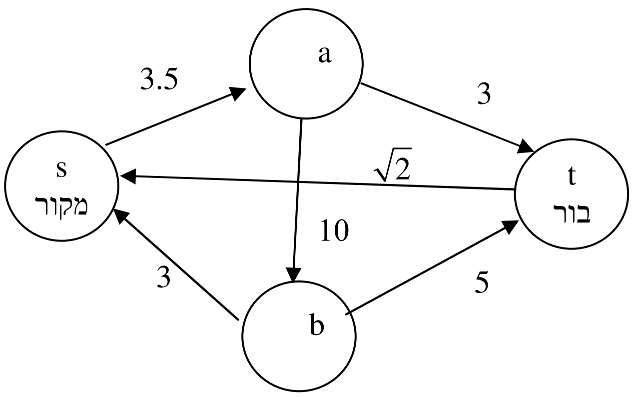
<u>רשתות זרימה:</u>
- הגדרות
- קשר בין זרימת מקסימום לבין חתך מינימום
- אלגוריתם גנרי למציאת זרימת מקסימום
- מימושים יעילים של האלגוריתם הגנרי

הגדרות: רשת זרימה $N=(G,s,t,c)$ מורכבת:
1. $G=(V,E)$ גרף מכוון (נניח לצורך הפישוט ש G חסר לולאות עצמיות וקשתות מקבילות).
2. שני צמתים מסוימים s,t, $s = source$=מקור, $t = sink$=בור. (הם לא בהכרח מקור ובור בהקשר של גרף מכוון).
3. פונקציה $c: E \to \mathbb{R}^+$ המתאימה לכל קשת מספר אי שלילי שנקרא <u>הקיבול</u> של הקשת (Capacity).

דוגמה:



פונקצית זרימה f היא פונקציה $f: E \to \mathbb{R}$ שמקיימת:
1. אילוץ הקיבול: $0 \le f(e) \le c(e)$ לכל $e \in E$.
2. חוק הצומת: $\sum_{e\in out(v)} f(e) = \sum_{e \in in(v)} f(e)$ לכל $v \in V \setminus \{s,t\}$.

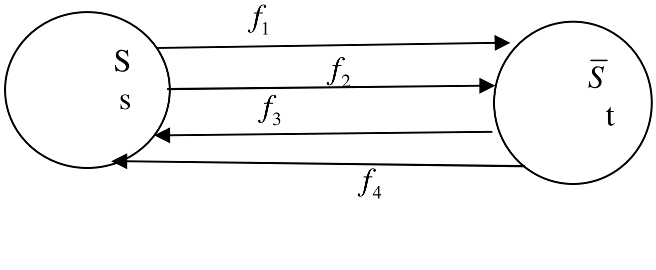
ערך פונקצית הזרימה $|f|$ מייצג את הזרימה נטו מהמקור לבור: $|f| = \sum_{e\in out(s)} f(e) - \sum_{e\in in(s)} f(e)$.

בעיית זרימת מקסימום:
בהינתן רשת זרימה, למצוא זרימה f בעלת ערך זרימה מקסימאלי (ביחס לכל שאר הזרימות).

חתך $s-t$: חתך $(S,\bar{S})$, $S,\bar{S} \subset V$ כך ש: $s \in S$ ו- $t \in \bar{S}$.

<u>למה:</u> לכל חתך $s-t$, $(S,\bar{S})$, ולכל זרימה f, מתקיים $|f| = \sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e) - \sum_{e\in(\bar{S},S)} f(e)$

$(u,v)\in(S,\bar{S}) \Leftrightarrow u \in S \wedge v \in \bar{S}$



הוכחה:

נחשב את הסכום: $(*) = \sum_{v\in\bar{S}}\left(\sum_{e\in in(v)} f(e) - \sum_{e\in out(v)} f(e)\right)$ בשתי דרכים:

1. לכל $v\in\bar{S}-\{t\}$ נקבל $\sum_{e\in in(v)} f(e) - \sum_{e\in out(v)} f(e) = 0$ לפי חוק הצומת.

ולכן : $(*) = \sum_{e\in in(t)} f(e) - \sum_{e\in out(t)} f(e) = |f|$

2. כל קשת (u,v) כך ש $u,v\in\bar{S}$ נספרות פעם אחת עם סימן + (עבור v) ופעם אחת עם סימן – (עבור u) ולכן מתקזזת בסכום הכללי. לכן נותרות רק קשתות מ S אל $\bar{S}$ (עם סימן +) וקשתות מ $\bar{S}$ אל S (אם סימן -) ולכן: $(*) = \sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e) - \sum_{e\in e\in(\bar{S},S)} f(e)$

מסקנה: אפשר לחשב את $|f|$ בכל חתך $s-t$ (בפרט במקור ובבור).

<u>קיבול של חתך:</u> $(S,\bar{S})$ מוגדר כ: $c(S,\bar{S}) = \sum_{e\in(S,\bar{S})} c(e)$.

<u>למה:</u> לכל חתך $s-t$, $(S,\bar{S})$ ולכל פונקצית זרימה f מתקיים: $|f| \le c(S,\bar{S})$.

<u>הוכחה:</u>

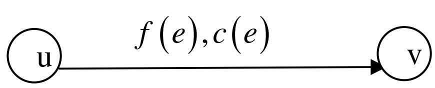
$$|f| = \sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e) - \sum_{e\in(\bar{S},S)} f(e) \underbrace{\leq}_{1} \sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e) \underbrace{\leq}_{2} \sum_{e\in(S,\bar{S})} c(e) = c(S,\bar{S})$$

1. כי הזרימה היא אי שלילית
2. מאילוצי קיבול

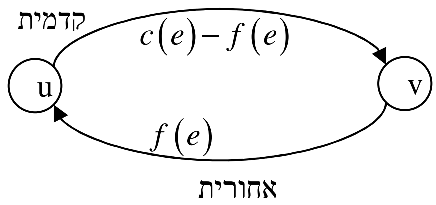
<u>מסקנה:</u> אם קיים חתך $s-t$, $(S,\bar{S})$ כך ש $|f| = c(S,\bar{S})$ אז f היא זרימת מקסימום.

<u>מסלול שיפור:</u>

<u>קיבול שיורי:</u> לכל קשת e עם קיבול $c(e)$ וזרימה $f(e)$ נגדיר 2 קשתות עם קיבול שיורי (residual capacity)

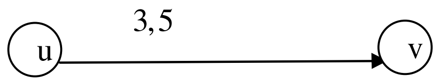


קיבול שיורי:

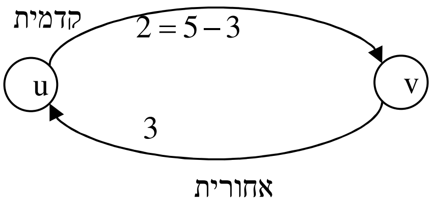


קשתות אלה מייצגות את מה שניתן להוסיף ולהזרים על הקשת או להחסיר מהקשת ועדין לעמוד באילוץ הקיבול.

לדוגמה:
רשת זרימה:



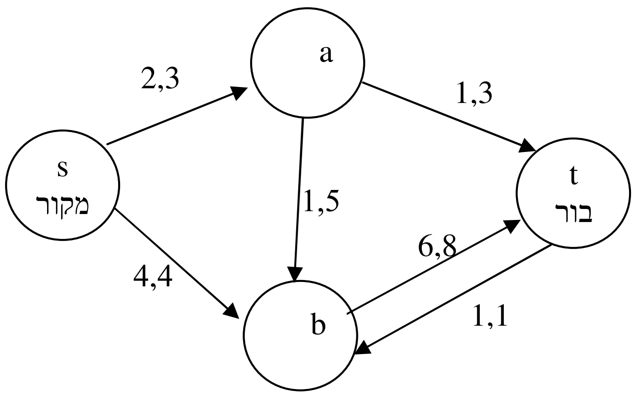
קיבול שיורי:



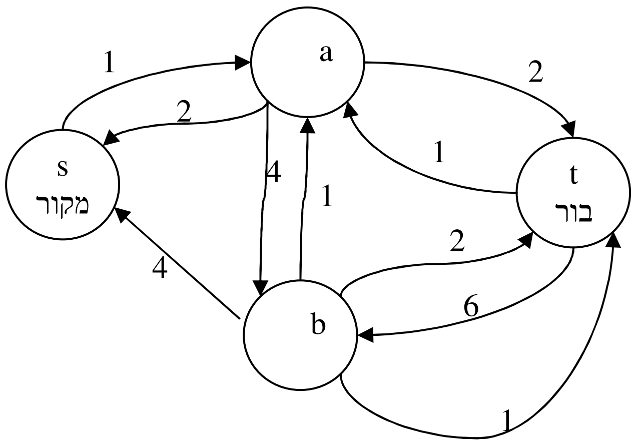
<u>גרף שיורי:</u> מורכב מכל הקשתות עם קיבול שיורי גדול מאפס.

<u>מסלול שיפור</u>: (angment path) מסלול (מכוון) מ s אל t בגרף השיורי G_R

<u>דוגמה:</u>
רשת זרימה:



הגרף השיורי שיתקבל הוא:



עבור מסלול שיפור P יהי Δ הקיבול השיורי הקטן ביותר לאורך P.
<u>טענה:</u> אם נגדיל את הזרימה בכל קשת (ברשת הזרימה) שמתאימה לקשת קדמית (ב G_f) ב Δ ונפחית ב Δ את הזרימה בכל קשת (ברשת הזרימה) שמתאימה לקשת אחורית ב P, אז נקבל זרימה חוקית שערכה גדל ב Δ.

<u>הוכחה:</u> מהגדרת הקיבול השיורי ומבחירת Δ מובטח שאילוצי הקיבול יישמרו. נסתכל על צומת פנימי ב P (לא ראשון ולא אחרון): $\ldots \xrightarrow{e_1} v \xrightarrow{e_2} \ldots$ ונסתכל על כל האפשרויות:

G_f		רשת הזרימה
e_1	e_2	
קדמית	קדמית	$\ldots \xrightarrow{e_1+\Delta} v \xrightarrow{e_2+\Delta} \ldots$
קדמית	אחורית	$\ldots \xrightarrow{e_1+\Delta} v \xleftarrow{e_2-\Delta} \ldots$
אחורית	קדמית	$\ldots \xleftarrow{e_1-\Delta} v \xrightarrow{e_2+\Delta} \ldots$
אחורית	אחורית	$\ldots \xleftarrow{e_1-\Delta} v \xleftarrow{e_2-\Delta} \ldots$

בכל המקרים מה שנכנס נשאר שווה למה שיוצא ולכן חוק הצומת נשמר.

t הוא הצומת האחרון במסלול:
$\ldots \xrightarrow{e} t$

G_f	רשת הזרימה
e קדמית	$\ldots \xrightarrow{+\Delta} t$
e אחורית	$\ldots \xleftarrow{-\Delta} t$

בשני המקרים, ערך פונקצית הזרימה גדל ב Δ.

משפט חתך מינימום – זרימת מקסימום: min cat – max flow
תהא f פונקצית זרימה ברשת זרימה $N=(G,s,t,c)$ אזי הטענות הבאות שקולות:
1. f היא זרימת מקסימום.
2. אין מסלול שיפור ב G_f.
3. קיים חתך $s-t$ $(S,\bar{S})$ כך ש: $|f|=c(S,\bar{S})$.

<u>הוכחה:</u>
$1 \Leftarrow 2$: כי אם יש מסלול שיפור ראינו שניתן להגדיל את ערך פונקצית הזרימה בסתירה לכך ש f היא זרימת מקסימום.

$2 \Leftarrow 3$: נגדיר $S=$ אוסף כל הצמתים שאפשר להגיע מ s אליהם בגרף השיורי G_f.
$s \in S$ כי יש מסלול ריק מ s אל עצמו.
$t \notin S$ כי אין מסלול שיפור ולכן $(S,\bar{S})$ הוא חתך $s-t$.

$$|f|=\sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e)-\sum_{e\in(\bar{S},S)} f(e)$$

עבור קשת $e=(u,v)$ כך ש $u\in S$ ו $v\in\bar{S}$ מתקיים ש $f(e)=c(e)$ כי אם לא, אז יש קשת עם קיבול שיורי גדול מאפס מ u אל v ולכן יש מסלול ב G_f מ s אל v דרך u בסתירה לכך ש $v\in\bar{S}$.

עבור קשת $e=(y,x)$ כך ש $x\in S$ ו $y\in\bar{S}$ אם $f(e)>0$ אז קיימת בגרף השיורי קשת (אחורית) $y \to x$ עם קיבול שיורי גדול מאפס ולכן יש מסלול מ s ל y בסתירה לכך ש $y\in\bar{S}$, ולכן עבור קשתות כאלה: $f(e)=0$.

מכן ש: $\left|f\right| = \sum_{e\in(S,\bar{S})} f(e) - \sum_{e\in(\bar{S},S)} f(e) = \sum_{e\in(S,\bar{S})} c(e) - 0 = c\left(S,\bar{S}\right)$

<u>מסקנה</u>: אם ידועה זרימת מקסימום, אז אפשר לחשב בצורה זו חתך מינימום (חתך $s-t$ עם קיבול מינימאלי).

<u>שיטת $Ford-Fulkerson$ למציאת זרימת מקסימום:</u>

אלגוריתם גנרי:

1. אתחול: זרימה 0 בכל הקשתות
2. כל עוד קיים מסלול שיפור P מ s אל t ב G_f, שפר את הזרימה לאורך P.

<u>הערות:</u>

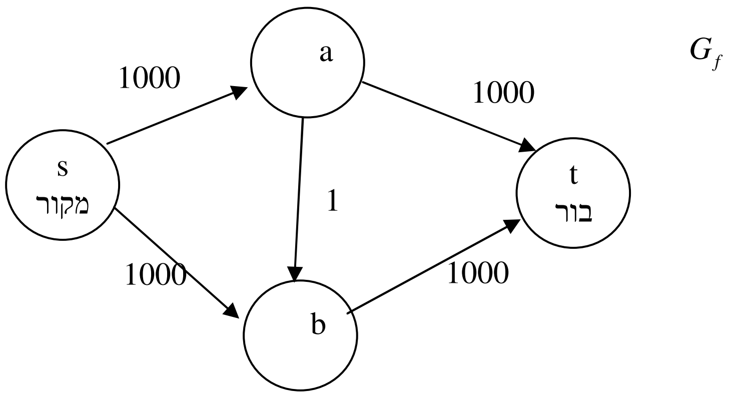
1. אם הקיבולים על הקשתות אינם רציונאליים, אז לא מובטח שהאלגוריתם יעצור!
2. אם הקיבולים על הקשתות שלמים (או רציונאליים) אז האלגוריתם מוצא זרימת מקסימום בשלמים.

(אם הזרימה ברציונאליים אז אפשר לעשות רדוקציה לזרימה במספר שלמים).

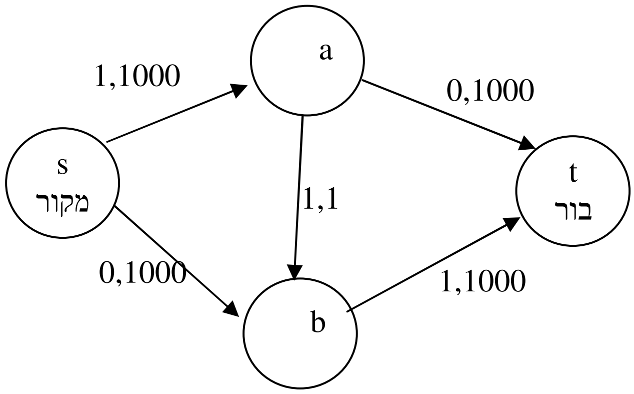
בכל שלב משפר את הזרימה בלפחות יחידה אחת.

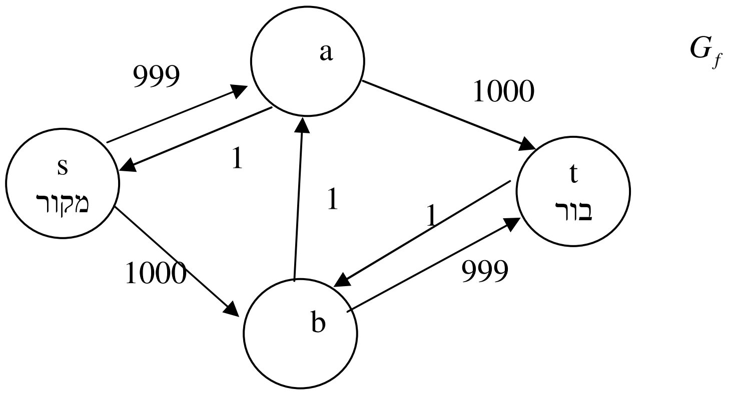
מספר האיטרציות הוא לכל היותר $\left|f^*\right|$ כאשר f^* היא זרימת המקסימום.

נראה דוגמה שמספר האיטרציות הוא בדיוק $2000 = \left|f^*\right|$:



רשת הזרימה:




a
s
מקור
t
בור
b
999
1
1000
1
1
1000
999
G_f