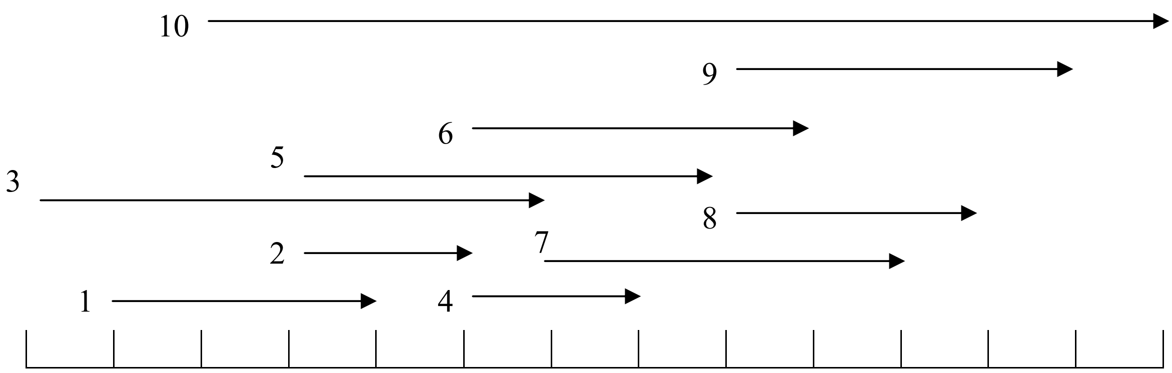
אלגוריתמים חמדניים (greedy)
1. מציאת קבוצה בלתי תלויה מקסימאלית (של משימות).
2. קוד אופטימאלי לדחיסת נתונים.

1. מציאת קבוצה בת"ל מקסימאלית.
נתון: אוסף של מטלות $\{a_1...a_n\}$.
מטלה a_i מאופיינת ע"י זמן התחלה s_i וזמן סיום f_i.
יש לבצע קבוצה גדולה ביותר של מטלות על משאב יחיד, כך שאף שתי מטלות לא נחתכות.

לדוגמה:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	a_i
2	8	8	6	5	3	5	0	3	1	s_i
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	f_i



אלגוריתם חמדני לקבוצה בת"ל מקסימאלית.
קלט: אוסף $S=\{a_1...a_n\}$ של מטלות, שמאופיינות ע"י קטע (s_i,f_i).
פלט: תת קבוצה מקסימאלית A של S של קטעים זרים בזוגות.
אתחול: מיין את המטלות לפי סדר עולה של זמני סיום f_i : $f_1 \le f_2 \le ... \le f_n$
עבור $m=1$ עד $m=n$ בצע:
אם a_m זרה לכל המטלות שנבחרו, הוסף אותה ל A.

מימוש:
$f_0 \leftarrow -\infty$, $i \leftarrow 0$, $A \leftarrow \phi$
עבור $m=1$ עד $m=n$ בצע:
אם $f_i \le s_m$ הוסף את a_m ל A, $i \leftarrow m$.

<u>סיבוכיות:</u> $\Theta(n\cdot\log n)$ (מיון של כל הקטעים לפי זמן הסיום).

<u>הוכחת נכונות:</u>
האלגוריתם החמדני מחזיר קבוצה בלתי תלויה מקסימאלית של קטעים.
<u>הוכחה:</u> מכל הפתרונות האופטימאליים שקיימים, קיים פתרון W כך ש: $|A\cap W|$ מקסימאלי.
(A הוא הפתרון החמדני). אם A=W הטענה נכונה, לכן נניח $W \ne A$.
הקטעים ממוינים לפי זמן סיום.

תהי a_i משימה כך ש: $a_i \in W \setminus A$, f_i מינימאלי. (הראשון ב W שאיננו ב A)
תהי a_j משימה כך ש: $a_j \in A$, $f_j \le f_i$ (המשימה שנבחרה ע"י האלגוריתם החמדני A לאחר שנבחרו כל האיברים הקודמים ל a_i)

נגדיר $W' = W \setminus \{a_i\} \cup \{a_j\}$ אז:
1. $|W'| = |W|$.
2. ב W' כל הקטעים זרים. (כי a_j שייך ל A ועד המקום ה j הקטעים ב W' זהים לאלו שב A. ומעבר למקום ה j : $f_j \le f_i$ ולכן אם a_i לא נחתך עם קטעים אחרים ב W אז בוודאי ש a_j לא נחתך עם קטעים כאלו כי הוא מסתיים לפני a_i).
$\Leftarrow$ W' פתרון אופטימאלי.
3. $|W' \cap A| > |W \cap A|$ בסתירה לכך ש $|W \cap A|$ מקסימאלי

2. קודים אופטימאליים לדחיסת נתונים:
נתון קוד בן 100,000 תווים.

תו	a	b	c	d	e	f
מספר הופעות	45,000	13,000	12,000	16,000	9,000	5,000

צריך לאכסן את הקובץ ע"י קידוד כל אות למילה בינארית באופן שניתן יהיה פענח את הקובץ.
קוד "חד-פענח" הוא קוד בו לכל מילה קיים פענוח יחיד.

קוד "פרפיקסי" הוא קוד שבו לכל אות X, הקידוד של X איננו רישא של קידוד של אות אחרת.
קוד פרפיקסי הוא קוד חד-פענח.
בעזרת הקוד הזה ניתן לאכסן את הקובץ ב 300,000 ביטים.
יש לנו קבוצה C של מילות קוד (כל מילה מתאימה לתו)
אורך המילה c הוא $l(c)$.
תדירות של תו המתאים ל c היא $f(c)$.
מספר הביטים הדרושים לאכסון הקובץ הוא $\sum_{c\in C} f(c)\cdot l(c)$.

הקוד אמור להיות חד פענח.
קוד הוא אופטימאלי (עבור תדירויות נתונות) אם $\sum_{c\in C} f(c)\cdot l(c)$ הוא מינימאלי אפשרי.

<u>הבעיה:</u> נתונים תווים עם תדירויות. צריך למצוא עבורם קוד חד פענח אופטימאלי.
<u>נוכיח:</u> (לא היום), קיים קוד פרפיקסי אופטימאלי..

<u>בעיה:</u> למצוא עץ מצבים אופטימאלי לסדרת התווים והתדירויות הנתונה.

יהי T עץ המתאר קוד פרפיקסי C. לכל $c\in C$, $d_T(c)=$ (העומק של c ב T)
קוד (עץ) הוא אופטימאלי אם $B(c)=\sum_{c\in C} f(c)\cdot l(c)$ הוא קטן ככל האפשר.
טענה (תוכח בתרגול): לכל סדרה של תווים עם תדירויות, קיים קוד פרפיקסי אופטימאלי, בו שתי המלים (תווים) בעלות התדירויות הקטנות ביותר, מופיעות כזוג עלים אחים בעלי עומק מקסימאלי.

<u>אלגוריתם הופמן לקוד פרפקסי אופטימאלי:</u>
קלט: אוסף $\left(c, f\left(c\right)\right)$ של תווים ותדירויות.
פלט: עץ <u>הופמן</u> עם n עלים, עלה לכל תו, כך ש: $\sum_{c\in C} d_T(c)\cdot f(c)$ מינימאלי.

אתחול:
$Q\leftarrow C$ (תור עדיפויות)
אם $|Q|=1$ החזר עץ המכיל את הצומת היחיד ב Q.
אחרת בצע: הוצא מ Q 2 איברים, x, y בעלי תדירויות מינימאליות.
הכנס ל Q איבר חדש z, שתדירותו: $f(z)=f(x)+f(y)$.
בצע את האלגוריתם באופן רקורסיבי על Q.
בעץ שהוחזר, הוסף ל z 2 בנים x, y.