<u>קירובים דיסקרטיים לנגזרות ולאינטגרלים (המשך)</u>

נתונה פונקציה הדגומה במספר נקודות, ובאמצעות ערכי הפונקציות נמצא קירובים לנגזרות של הפונקציה או לאינטגרל של הפונקציה בכמה נקודות.
הנוסחאות המתקבלות נקראות נוסחאות הפרשים.

בהינתן Lf - אופרטור רציף כמו נגזרת או נגזרת שניה או אינטגרל, רוצים לקרב אותו באמצעות $L_h f$ - אופרטור ההפרשים.
לאחר מכן יש להעריך את שגיאת הקיטוע - ההפרש $R_T = Lf - L_h f$.
לבסוף צריך לשפר את הדיוק.

היינו רוצים להקטין את h - המרווח בין נקודות הדגימה, כמה שאפשר, אולם לא ניתן להקטין אותו ללא סוף.

$f'_0 \approx \frac{1}{2h}\left(f_1 - f_{-1}\right)$ - הנגזרת בנקודה המרכזית שווה להפרש ערכי הפונקציה בנקודות הדגימה הסמוכות חלקי המרחק ביניהן.

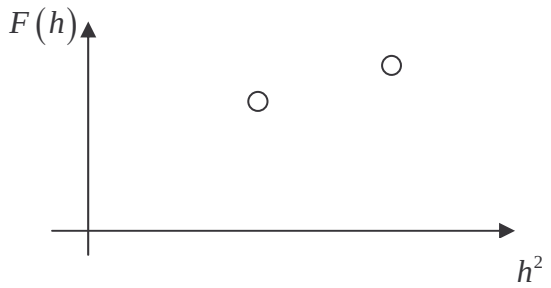
השגיאה המתקבלת היא: $R_T = \frac{1}{6} f_0''' h^2 + O\left(h^4\right)$

<u>אקסטרפולצית ריצ'רדסון</u>

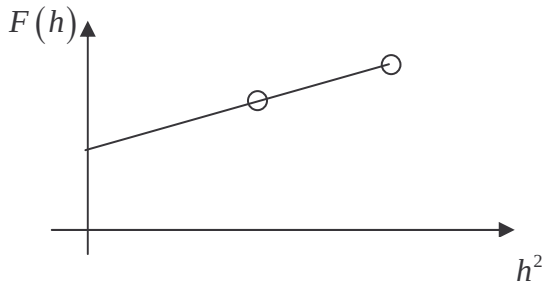
נסמן: $F(h) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)\right]$

שגיאת הקיטוע היא: $R_T = \frac{1}{6} f_0''' h^2 + O\left(h^4\right)$

נצייר גרף של $F(h)$ כנגד h^2 החל מערך h מינימאלי כלשהו (לא מתקרבים ל $h = 0$)



היינו רוצים לחשב עבור $h = 0$, ולכן נחבר את הקו בין שתי הנקודות ונמשיך אותו עד $h = 0$



נחשב $F(h)$ ונחשב $F(qh)$ עבור $q>1$.
לשני הערכים הללו יש פיתוח לטורים:

$$F(h)=a_0+a_1h^2+O(h^4)$$
$$F(qh)=a_0+a_1q^2h^2+O(h^4)$$

המטרה היא לחשב את a_0 - הערך המתקבל כאשר h שואף לאפס - השווה לנגזרת.
נכפיל את המשוואה הראשונה ב q^2 ואז נחסר אותה מהמשוואה השניה. נקבל:

$$F(qh)-q^2F(h)=a_0(1-q^2)+O(h^4)$$

סה"כ: $a_0=\frac{1}{1-q^2}\left[F(qh)-q^2F(h)\right]+O(h^4)$

<u>משפט:</u> נתונה נוסחה סגורה $F(h)$ וידוע שקיים פיתוח מהסוג:

$$F(h)=a_0+a_1h^{p_1}+a_2h^{p_2}+\ldots+a_nh^{p_n}+\ldots$$

כאשר $0<p_1<p_2<\ldots$ וה- p_i -ים ידועים.
המקדמים $a_0,a_1,a_2,\ldots$ לא ידועים, אך הם לא תלויים ב h.

בוחרים מספר $q\neq 1$ (בפועל $q>1$).
מגדירים: $F_1(h)=F(h)$

$F_{k+1}(h)=F_k(h)+\frac{F_k(h)-F_k(qh)}{q^{p_k}-1}$ עבור $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$.

אזי ל $F_n(h)$ יש פיתוח מהצורה: $F_n(h)=a_0+a_n^{(n)}h^{p_n}+\ldots=a_0+O(h^{p_n})$
כאשר $a_n^{(n)}$ מקדם בלתי תלוי ב h.

הוכחה: באינדוקציה.

m	h_m	$F(h_m)$		
0	h_0	$A_{0,0}$	$A_{1,1}=A_{1,0}+\frac{A_{1,0}-A_{0,0}}{q^{p_1}-1}$	$A_{2,2}=A_{2,1}+\frac{A_{2,1}-A_{1,1}}{q^{p_2}-1}$
1	$h_1=\frac{h_0}{q}$	$A_{1,0}$	$A_{2,1}=A_{2,0}+\frac{A_{2,0}-A_{1,0}}{q^{p_1}-1}$	
2	$h_2=\frac{h_0}{q^2}$	$A_{2,0}$		
		$R_T\approx a_1h^{p_1}$	$R_T\approx a_2h^{p_2}$	$R_T\approx a_3h^{p_3}$

$A_{i,j}$ - i - מספר שורה, j - מספר אקסטרפולציה

דוגמה:

$$f(x)=sin(x)$$

רוצים לחשב: $f'\left(x_0=\frac{\pi}{4}\right)$ בשיטה נומרית בדיוק של 5 ספרות דצימאליות ע"י שימוש בנוסחה:

$F(h)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0+h)-f(x_0-h)\right]=f_0'+R_T$ והערכים $h_0=0.2$, $q=2$.

$p_1=2$, $p_2=4$ (כי נוסחת שגיאת הקיטוע היא: $R_T=\frac{1}{6}f_0'''h^2+O\left(h^4\right)$)

אפשר להראות כי $p_3=6$, $p_4=8$ וכן הלאה, $p_i=2i$.

$$A_{m,0}=F(h_m)=\frac{1}{2h_m}\left[sin\left(\frac{\pi}{4}+h_m\right)-sin\left(\frac{\pi}{4}-h_m\right)\right]$$

m	h_m	$F(h_m)$		
0	$h_0=0.2$	$A_{0,0}=0.702402$	$A_{1,1}=A_{1,0}+\frac{A_{1,0}-A_{0,0}}{q^{p_1}-1}$ $=0.705929+0.001176$ $=0.707105$	$A_{2,2}=A_{2,1}+\frac{A_{2,1}-A_{1,1}}{q^{p_2}-1}$ $=0.707106+0.000000$ $=0.707106$
1	$h_1=\frac{h_0}{q}=0.1$	$A_{1,0}=0.705929$	$A_{2,1}=A_{2,0}+\frac{A_{2,0}-A_{1,0}}{q^{p_1}-1}$ $=0.706812+0.000294$ $=0.707106$	
2	$h_2=\frac{h_0}{q^2}=0.05$	$A_{2,0}=0.706812$		
		$R_T\approx a_1h_2^{\,2}$ $=O\left(0.05^2\right)$	$R_T\approx a_2h_2^{\,4}$ $=O\left(0.05^4\right)$	$R_T\approx a_3h_2^{\,6}$ $=O\left(0.05^6\right)$

רוצים לקרב אינטגרל חד מימדי: $I=\int_a^b f(x)w(x)dx$ כאשר a,b נתונים ונתונה פונקצית משקל אי שלילית אינטגרבילית $w(x)$. נתון $a<b$.

נשתמש ב $m+1$ נקודות $x_0,x_1,...,x_m\in[a,b]$ וגם ב $m+1$ מקדמים A_i-ים בלתי תלויים ב $f(x)$.

$$\hat{I}=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$$

השגיאה תהיה $E=I-\hat{I}$

נשתמש בשיטות אינטרפולטוריות.

נניח שנתונות נקודות הדגימה $x_0,x_1,...,x_m\in[a,b]$.

$f(x)=p_m(x)+r(x)$ כאשר $p_m(x)$ הוא פולינום האינטרפולציה ע"פ הנקודות הנתונות ו $r(x)$ היא פונקצית השגיאה.

כעת: $$\int_a^b f(x)w(x)dx=\underbrace{\int_a^b p_m(x)w(x)dx}_{\hat{I}}+\underbrace{\int_a^b r(x)w(x)dx}_{E}$$

נשתמש בפולינומי לגראנז':

$$p_m(x)=\sum_{i=0}^{m}f_i\cdot\delta_i(x)$$

כעת נחשב אינטגרל של $p_m(x)w(x)$:

$$\int_a^b w(x)p_m(x)=\int_a^b\sum_{i=0}^{m}f_i\cdot\delta_i(x)w(x)dx$$

אינטגרל על סכום שווה לסכום האינטגרלים:

$$\int_a^b w(x)p_m(x)=\int_a^b\sum_{i=0}^{m}f_i\cdot\delta_i(x)w(x)dx=\sum_{i=0}^{m}\left(\underbrace{\left(\int_a^b\delta_i(x)w(x)dx\right)}_{A_i}\cdot f_i\right)$$

במקרה כזה השגיאה תהיה: $$E=\int_a^b\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdot...\cdot(x-x_m)w(x)dx$$

<u>משפט:</u> $\hat{I}$ הנ"ל הוא בעל דיוק פולינומי מסדר m לפחות.

נניח $f(x)=p_m(x)$ - במקרה כזה $E=0$.

מסקנה: $E=0$ כאשר $f(x)=1,x,x^2,...,x^m$

$$\int_a^b x^\alpha w(x)dx=A_0x_0^\alpha+A_1x_1^\alpha+...+A_mx_m^\alpha$$ עבור $\alpha=0,1,...,m$

מתקבלת מערכת **<u>ליניארית</u>** של $m+1$ משוואות עבור הנעלמים $A_0,A_1,...,A_m$.

למערכת זו פיתרון קיים ויחיד.

דוגמה:

$w(x)=1$

הקטע הוא $[0,h]$ ונקודות הדגימה הן $x_0=0$ ו $x_1=1$.

האינטגרל שרוצים לקרב הוא: $I=\int_0^h f(x)dx$

רוצים לקרב אותו באמצעות $\hat{I}=A_0\cdot f(0)+A_1\cdot f(h)$

$\int_0^h x^\alpha dx = A_0\cdot x_0^{\alpha}+A_1\cdot x_1^{\alpha}$ עבור $\alpha\in\{0,1\}$.

עבור $\alpha=0$ נקבל: $\int_0^h x^0dx=\int_0^h 1dx=h=A_0\cdot 1+A_1\cdot 1$

עבור $\alpha=1$ נקבל: $\int_0^h x^1dx=\int_0^h xdx=\frac{1}{2}h^2=A_0\cdot 0+A_1\cdot h$

יש כאן שתי משוואות עם שני נעלמים (h ידוע).

מתקבל: $A_0=A_1=\frac{1}{2}h$.

$\int_0^h f(x)dx\approx\frac{1}{2}h\left[f(0)+f(h)\right]$ - זוהי נוסחת הטרפז - הנוסחה לחישוב שטח טרפז.

מה לגבי השגיאה?

$E=I-\hat{I}=\int_0^h\frac{1}{2}f''(\xi)(x-0)(x-h)dx$ עבור $\xi\in(0,h)$

הערך $(x-0)(x-h)$ שומר על סימן בתחום הזה.

$$E=I-\hat{I}=\int_0^h\frac{1}{2}f''(\xi)(x-0)(x-h)dx=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^h(x-0)(x-h)dx$$

זאת על פי המשפט:

אם $G(x)$ שומרת על סימן בקטע (a,b) ו $F(x)$ רציפה בקטע זה, אזי:

$\int_a^b F(x)G(x)dx=F(\xi)\int_a^b G(x)dx$ עבור $\xi\in(a,b)$

סה"כ: $E=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^h(x-0)(x-h)dx=-\frac{1}{12}h^3f''(\xi)$

נרחיב זאת לקטע $[a,b]$ עם $n\geq 1$ מרווחים: $h=\frac{b-a}{n}$.

על כל אחד מהקטעים הללו ניתן להפעיל את נוסחת הטרפז, ואחר כך לסכם את התוצאות.

במקרה זה: $I=\int_a^b f(x)dx\approx\hat{T}(h)=h\cdot\left[\frac{1}{2}f(\alpha)+f(a+h)+f(a+2h)+...\frac{1}{2}f(b)\right]$

בנקודות החיצוניות מופיע מקדם $\frac{1}{2}$ ובנקודות הפנימיות מופיע מקדם 1.

על הנוסחה הזאת ניתן לבצע אקסטרפולצית ריצ'רדסון.

שיטת רומברג Romberg

$\hat{T}(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + \ldots$ מתקבל מנוסחת אויילר מקלורן.

משתמשים באקסטרפולצית ריצ'רדסון עם $q = 2$.

$h_0 = b - a$ - במקרה כזה $\hat{T}(h_0) = \underbrace{\left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right]}_{\Sigma_0} \cdot h_0$

$h_1 = \frac{b-a}{2}$ - במקרה כזה: $\hat{T}(h_1) = \left(\underbrace{\left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right]}_{\Sigma_0} + \underbrace{\left[f(a+h_1) \right]}_{\Sigma_1} \right) \cdot h_1$

$h_2 = \frac{b-a}{4}$ - במקרה כזה: $\hat{T}(h_2) = \left(\Sigma_0 + \Sigma_1 + \underbrace{f(a+h_2) + f(a+3h_2)}_{\Sigma_2} \right) \cdot h_2$

השיטה מאוד יעילה כי בכל פעם משתמשים בנקודות שכבר חישבנו בשלבים הקודמים.

דוגמה:

רוצים לחשב $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ בשיטת רומברג כאשר בוחרים: $h_0 = 1$ ומעוניינים להגיע לדיוק 10^{-4}.

m	h_m	$\hat{T}(h_m) = A_{m,0}$	$\frac{\Delta}{q^2-1} = \frac{\Delta}{3}$	$\frac{\Delta}{q^4-1} = \frac{\Delta}{15}$
0	$h_0 = 1$	$A_{0,0} =$ 0.75000	$\Delta/3 = -0.013889$ $A_{1,1} = 0.694444$	$\Delta/15 = -0.000079$ $A_{2,2} = 0.693175$
1	$h_1 = \frac{h_0}{q} = 0.5$	$A_{1,0} =$ 0.708333	$\Delta/3 = -0.000377$ $A_{2,1} = 0.693254$	
2	$h_2 = \frac{h_0}{q^2} = 0.25$	$A_{2,0} =$ 0.697024		

$$\hat{T}(h_0) = 1 \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\right]}_{\Sigma_0 = 0.75000} = 0.75000$$

$$\Sigma_1 = f(1.5) = \frac{1}{1.5} = 0.666667 \qquad \hat{T}(h_1) = 0.5\left[\Sigma_0 + \Sigma_1\right] = 0.708333$$

$$\Sigma_2 = f(1.25) + f(1.75) = \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.75} \qquad \hat{T}(h_2) = 0.25\left[\Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2\right] = 0.697024$$