<u>קירובי פונקציה באמצעות פולינום (המשך):</u>

קירוב ספליין $Spline$ **:**

נתונות אוסף של נקודות דגימה עם ערכי הפונקציה

$x_0, x_1, x_2, \ldots x_m$

$y_0, y_1, y_2, \ldots y_m$

נניח שהנקודות מסודרות: $x_i > x_j \Leftarrow i > j$.

ספליין מסדר p : $S_p(x)$ - אוסף של פולינומים מסדר p . כל אחד מהפולינומים הללו מותאם למרווח בין הנקודות x_{i-1}, x_i כך שהוא עובר בקצות המרווח, ובנוסף מתקיימת רציפות של $p-1$ נגזרות בנקודות הצומת המשותפות.

לקטע $[x_{i-1}, x_i]$ נקרא "תת מרווח i", עבור $i = 1, 2, \ldots, m$.

לנקודה x_i יש פולינומים הנוגע בה מצד שמאל, $i-1$ ופולינום הנוגע בה מצד ימין, i, ובנקודה הזו ערך שני הפולינומים זהה, וכך גם $p-1$ הנגזרות שלהם.

ספליין מסדר 1: $S_1(x)$ - אוסף של קווים ישרים.

ספליין מסדר 2: בכל תת קטע, יש פרבולה ויש נגזרת רציפה אחת (לפחות) בין הנקודות.

ספליין מסדר 3: $S_3(x)$, $cubic-spline$ ספליין קובי: אוסף של פולינומים מסדר שלישי.

זהו הסדר הגבוה ביותר שעדין ניתן לחשב אותו בסיבוכיות ליניארית ביחס למספר הנקודות.

נגדיר: $h_i = x_i - x_{i-1}$ - אורך המרווח.

נגדיר: $d_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$ - שיפוע המרווח.

נגדיר: $t_i(x) = \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}$ - הוא מקבל ערך 0 בקצה השמאלי של המרווח ו 1 בקצה הימני של המרווח.

הוא מוגדר עבור $x_{i-1} \le x \le x_i$ והערכים שהוא מקבל הם בטווח $0 \le t \le 1$.

נגדיר: $q_i(t) = ty_i + (1-t)y_{i-1} + h_i t(1-t)\left[(k_{i-1} - d_i)(1-t) - (k_i - d_i)t\right]$

נסתכל על ספליין q_{i-1}, q_i בנקודת המפגש: עבור q_{i-1} נקבל $t_{i-1} = 1$ ועבור q_i נקבל ש $t_i = 0$.

לכן על מנת שערך שני הפולינומים בנקודת המפגש יהיה זהה דרוש:

$h_{i+1}\underline{k_{i-1}} + 2(h_i + h_{i+1})\underline{k_i} + h_i\underline{k_{i+1}} = 3(h_i d_{i+1} + h_{i+1} d_i)$ - המסומנים בקו הם נעלמים.

נקבל שיש לנו $m-1$ משוואות כאלו עבור $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.

מספר הנעלמים הוא $m+1$: $k_0, k_1, \ldots, k_m$.

לכן יש לנו כאן שתי דרגות חופש בבחירת ה k_i-ים.

<u>תנאי שפה "טבעי":</u>

בנקודות הקצה: x_0, x_1 הספליין מקבל נגזרת שניה אפס - כלומר הוא הופך לקו ישר.

לכן נוסיף את המשוואות: $2k_0 + k_1 = 3d_1$ (נובע מ $q''_1(t=0) = 0$)

$k_{m-1} + 2k_m = 3d_m$.

נקבל מערכת תלת אלכסונית:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \dots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \dots \\ R_m \end{pmatrix}$$

חישוב הספליין מתבצע על ידי חישוב ה h_i-ים וה d_i-ים ואח"כ פתירת המערכת.

נניח שרוצים למצוא $S_3(x)$ עבור x כלשהו. נניח ש $x_0 \le x \le x_m$.

מוצאים לאיזה מרווח x שייך - $i = ?$.

מחשבים את $t_i(x) = ?$ - נקבל ערך בין 0 ל 1.

מחשבים את $q_i(t)$ וזוהי התוצאה: $S_3(x) = q_i(t)$

פתרון של מערכת המשוואות: $A\overline{x} = \overline{f}$ כאשר המטריצה A היא תלת אלכסונית, כלומר יש לה איברים שונים מאפס רק באלכסון הראשי ובשני האלכסונים הצמודים לו.

$$\det(A) \neq 0 \quad , A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & b_2 & \dots & \dots & c_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = LU$$

ניתן להסתכל על המטריצה גם כמכפלה של שתי מטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \dots & \dots & \\ & & \beta_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & \\ & \alpha_2 & \dots & \\ & & \dots & c_{n-1} \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = a_1 \quad , \beta_k = \frac{b_k}{\alpha_{k-1}} \quad , \alpha_k = a_k - \beta_k c_{k-1} .$$

הפתרון הוא: $(LU)\overline{x} = L\overline{g} = \overline{f}$

$$\overline{g} = U\overline{x}$$

$$L\overline{g} = \overline{f} \Rightarrow g_i \quad ,\text{i=1,2,...m}$$

$$U\overline{x} = \overline{g}$$

<u>גזירה ואינטגרציה נומרית (בשיטות פשוטות)</u>

נתונה פונקציה מסוימת f שערכה ידוע במספר נקודות.

$$f_i, f_{i+1}, \ldots, f_{i+k}$$

$$x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$$

רוצים לקרב את הנגזרת (הראשונה או השניה, או האינטגרל) בנקודות הנתונות.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = ? \quad , f_i'' = ? \quad , f_i' = ?$$

נסמן ב Lf האופרטור האמיתי שפועל על f - למשל גזירה או אינטגרציה.

נסמן ב $L_h f$ את האופרטור המקרב.

ערכו יהיה צירוף ליניארי של ערכי הפונקציה: $L_h f = a_i f_i + \alpha_{i+1} f_{i+1} + \ldots$

המקדמים α_i יהיו בלתי תלויים בפונקציה.

נאמר שיש קירוב: $Lf \approx L_h f$.

נתמקד בשלושה דברים:

1. חישוב המקדמים α_i
2. הערכת השגיאה - שגיאת הקיטוע - R_T.
3. שיפור הדיוק.

חישוב המקדמים: נניח שהפונקציה שלנו היא פולינום מהדרגה הגבוהה ביותר בהתחשב בנתונים. נפתח את הנוסחה עבור הפולינום הזה ואח"כ נשתמש במקדמים גם עבור פונקציה שהיא לא פולינום.

דוגמה: ערך הפונקציה נתון בשלוש נקודות דגימה עם מרווח קבוע: x_{i-1}, x_i, x_{i+1}.

הערך הוא: f_{i-1}, f_i, f_{i+1} בהתאמה, והמרחק בין x_{i-1} ו x_i הוא המרחק בין x_{i+1} ו x_i והוא שווה ל h.

$Lf = f'(x_i)$ - רוצים לחשב את הנגזרת בנקודה האמצעית.

$L_h f = \alpha_{i-1} f_{i-1} + \alpha_i f_i + \alpha_{i+1} f_{i+1}$.

נזוז למערכת צירים בה הנקודה המרכזית נמצאת ב $x_i = 0$.

$Lf = f'(0)$.

$$L_h f = \alpha_{-1} f_{-1} + \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1$$

$f^*(x) = ax^2 + bx + c$.

$f^{*\prime}(x) = 2ax + b$ לכן $f^{*\prime}(0) = b$.

נאמר שיש קולוקציה בשלוש הנקודות:

$$f^*(-h) = ah^2 - bh + c = f_{-1}$$

$$f^*(0) = c = f_0$$

$$f^*(h) = ah^2 + bh + c = f_1.$$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל: $a = \frac{1}{2h^2}\left[f_{-1} - 2f_0 + f_1\right] \quad , b = \frac{1}{2h}\left[f_1 - f_{-1}\right]$

$L_h f = f(x=0) = b = \underbrace{\frac{1}{2h}}_{\alpha_1} f_1 - \underbrace{\frac{1}{2h}}_{\alpha_{-1}} f_{-1}$ - זהו בעצם השיפוע הליניארי בין שתי הנקודות הקיצוניות.

אין בעיה לחזור לאינדקסים המקוריים: $L_h f = \frac{1}{2h}\left[f_{i+1} - f_{i-1}\right] \approx f'(x_i)$.

מה לגבי הדיוק? נגדיר את שגיאת הקיטוע באופן הבא: $R_T = L_h f - Lf$.
נניח שהפונקציה שלנו גזירה מספר פעמים ונשתמש בטור טיילור.

$$R_T = \frac{1}{2h}\left[f_1 - f_{-1}\right] - f'_0$$

נחשב באמצעות פיתוח טיילור את ערך הפונקציה בשתי הנקודות הקיצוניות:

$$f_1 = f_0 + f'_0 h + \frac{1}{2} f''_0 h^2 + \frac{1}{3!} f''' h^3 + \ldots$$

$$f_{-1} = f_0 - f'_0 h + \frac{1}{2} f''_0 h^2 - \frac{1}{3!} f''' h^3 + \ldots$$

נציב בנוסחה של שגיאת הקיטוע ונקבל:

$$R_T = \frac{1}{\cancel{2}h}\left[\cancel{2} f'_0 \cdot h + \frac{\cancel{2}}{3!} f''' h^3 + \ldots\right] - f'_0 = \frac{1}{3!} f'''_0 \cdot h^2 + O\left(h^4\right)$$

סדר דיוק פולינומי: (עבור $R_T \equiv 0$) עבור כל פולינום מסדר שני שגיאת הקיטוע היא אפס.
$f(x) = p_2(x) \Rightarrow R_T \equiv 0$ - סדר הדיוק הוא 2.
סדר דיוק אסימפטוטי: (עבור $h \to 0$): $R_T \sim O\left(h^2\right)$ - סדר הדיוק הוא 2.

דוגמה: רוצים לחשב: $\frac{d}{dx}\left[e^{sin^3 x}\right]_{x=1}$:

$$f(x) = e^{sin^3 x} \quad , Lf = \left(f'\right)_{x_i=1}$$

נבחר: $h = 0.01$: $L_h f = \frac{1}{2h}\left[f(x_i + h) - f(x_i - h)\right]$

$$L_h f = \frac{1}{2 \cdot 0.01}\left[e^{sin^3 1.01} - e^{sin^3 0.99}\right] = 2.08237$$

נצפה הארבע הספרות הראשונות יהיו נכונות.
התשובה המדויקת היא: 2.08257.

<u>ננסה לחשב כעת קירוב לנגזרת השניה:</u>

$L_h f = \alpha_{-1} f_{-1} + \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1$, $L_f = f''(0)$.

$$f''(x) = 2a$$

$$f''(0) \approx 2a = \frac{1}{h^2}\left[f_{-1} - 2f_0 + f_1 \right]$$

שגיאת הקיטוע במקרה זה: $R_T = L_h f - Lf = \frac{1}{2h}\left[f_{-1} - 2f_0 + f_1 \right] - f_0''$.

שוב נשתמש בפיתוחי טיילור והפעם נקבל:

$$R_T = \frac{1}{12} f_0^{(4)} h^2 + O\left(h^4\right)$$

מסקנה: סדר הדיוק הפולינומי הוא 3 - אם הפונקציה היא כל פולינום מסדר שלישי, הנגזרת הרביעית (והבאות אחריה) מתאפסת, ולכן התשובה תהיה מדויקת.
סדר הדיוק האסימפטוטי הוא עדין 2.

<u>ננסה לבצע אינטגרציה:</u>

$$Lf = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$L_h f = \int_{-h}^{h} f^*(x)\,dx = \int_{-h}^{h} \left(ax^2 + bx + c\right)dx = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{1}{3}h\left(f_{-1} + 4f_0 + f_1 \right)$$

נוסחה זו נקראת נוסחת סימפסון - *Simpson*.

שגיאת הקיטוע: $R_T = \frac{1}{90} f_0^{(4)} h^5$.

סדר הדיוק הפולינומי - 3. סדר הדיוק האסימפטוטי - 5.

<u>שיפור הדיוק</u>

h_{opt} - מגבלות על המרווח h:

נחזור לדוגמה: $f(x) = e^{\sin^3 x}$.

בחרנו $h = 0.01$. מדוע דווקא ערך זה?

נניח שמשתמשים בשלוש נקודות f_{-1}, f_0, f_1.

$$f_0' \approx L_h f = \frac{1}{2h}\left[f_1 - f_{-1} \right]$$

במקרה הזה שגיאת הקיטוע היא $R_T = \frac{1}{6} f_0''' \cdot h^2$.

לכאורה נראה כאילו עדיף להשתמש ב h-ים קטנים ככל האפשר. הבעיה היא שניכנס לתהליך של התבטלות.

לא נוכל לחשב את f_1 אלא נחשב $f(x_0 + h) \pm \delta$.

לכל פונקציה ע"י מחשב קיימת שגיאה החסומה ע"י: $\left| \tilde{f}(x) - f(x) \right| \le \delta$.

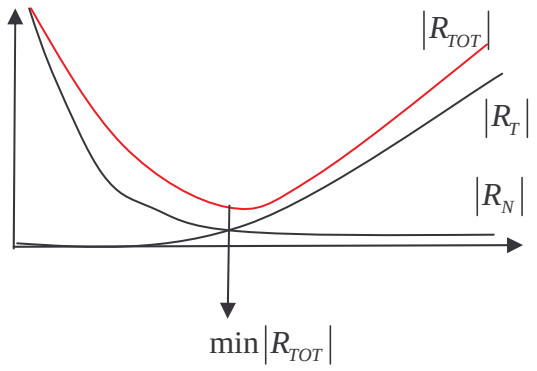
במקום לחשב את $L_h f$ נחשב את $\tilde{L}_h f = \frac{1}{2h}\left[\left(f_1 \pm \delta \right) - \left(f_{-1} \pm \delta \right) \right] = \frac{1}{2h}\left(f_1 - f_{-1} \right) \pm \frac{\delta}{h}$.

$R_N = \frac{\delta}{h}$ היא השגיאה הנומרית. $L_f = L_h f + R_T + R_N$.

אם נסמן $R_{TOT} = R_T + R_N$, השאיפה שלנו תהיה למזער את R_{TOT} .

הערך המוחלט של שגיאת הקיטוע הוא: $\left|R_T\right| = \frac{1}{6}\left|f_0'''\right|h^2$.

הערך המוחלט של השגיאה הנומרית הוא: $\left|R_N\right| = \frac{\delta}{h}$.



נחשב את הנגזרת $\frac{d}{dh}\left|R_{TOT}\right|$ על מנת למצוא את המינימום.

$\left|R_{TOT}\right| = \frac{1}{6}\left|f_0'''\right|\cdot h^2 + \frac{\delta}{h}$ לכן $h_{opt} = \left(\frac{3\delta}{\left|f_0'''\right|}\right)^{\frac{1}{3}}$. $\left|R_{tot}\right|_{opt} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{6}\left|f_0'''\right|\cdot\delta^{\frac{3}{2}}$.

דוגמה: $\delta = 10^{-6}$. במקרה זה: $\left|R_{TOT}\right| \approx 10^{-4}$.
איבדנו פקטור של 100 בחישוב.

קיימות מגבלות מעשיות על הקוטן של h !
היינו רוצים לקחת מרווחים קטנים, אבל יש על כך מגבלות מעשיות.
א. חישוב הפונקציה הוא בידינו. $f(x)$ בנקודות רצויות.

1. כאשר מפעילים גזירה נומרית המגבלה נובעת מהתבטלות כתוצאה מחיסור מספרים קרובים.
2. כאשר מפעילים אינטגרציה נומרית המגבלה נובעת מיוקר החישוב.

ב. $f(x)$ מתקבלת בטבלה או ממדידות. במקרה זה אין לנו שליטה על המרווח.