<u>קירוב פונקציה באמצעות פולינום (המשך)</u>

<u>דוגמה:</u>

נתון: $f(x)$ גזירה $m+1$ פעמים בקטע $[-1,1]$.

מתקיים: $\frac{d^{m+1}f}{dx^m} \le M_x$ בקטע (הנגזרת ה $m+1$ של f לפי x חסומה בקטע).

צריך לקרב את $f(x)$ באמצעות פולינום מסדר m ולהעריך את השגיאה בקטע הנ"ל.

<u>פתרון:</u>

א. פיתוח מקלורן: $f^*(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + ... + \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) x^m$.

השגיאה בכל נקודה חסומה על ידי: $R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!} x^{m+1}$ עבור $\zeta \in (-1,1)$

השגיאה הכללית חסומה על ידי: $\|R\|_\infty = \frac{M_x}{(m+1)!}$

ב. אינטרפולציה בנקודות דרישה $x_0, x_1, ..., x_m$.

האפסים של $T_{m+1}(x) = 0$

פולינום צ'בישב מסדר $m+1$: $T_{m+1}(x) = 2^m (x-x_0)(x-x_1)\cdot ...\cdot (x-x_m)$

פולינום הקירוב יהיה: $f^*(x) = p_m(x) = a_m x^m + ... + a_0$

אנחנו יודעים ש: $2^m (x-x_0)(x-x_1)\cdot ...\cdot (x-x_m) = T_{m+1}(x)$ לכן:

$(x-x_0)(x-x_1)\cdot ...\cdot (x-x_m) = \frac{T_{m+1}(x)}{2^m}$ בנוסף $|T_{m+1}(x)| \le 1$

השגיאה בכל נקודה חסומה על ידי:

$r(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \cdot (x-x_0)(x-x_1)\cdot ...\cdot (x-x_m)$ עבור $\xi \in (-1,1)$.

לכן: $\|r(x)\|_\infty \le \left| \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \right|_{\max} \cdot \overbrace{\left\| \frac{T_{m+1}}{2^m} \right\|_\infty}^{\frac{1}{2^m}} = \frac{M_x}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{2^m}$

קיבלנו שהשגיאה קטנה פי 2^m !!!

מה עושים עבור קטע אחר?

נתונה $f(t)$ גזירה $m+1$ פעמים ורוצים לקרב אותה בקטע $t \in [a,b]$.

בנוסף מתקיים: $\left| \frac{d^{m+1} f(t)}{dt^{m+1}} \right| \le M_t$

נבצע העתקה: $t = \frac{1}{2}(b-a)x + \frac{1}{2}(a+b)$ ונקבל $x \in [-1,1]$.

כעת: $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}(b-a) \cdot \frac{d}{dt}$

נוכל לחזור על כך m פעמים ולקבל חסם על הנגזרת של f לפי x: $M_x = \ldots = \left|\frac{1}{2}(b-a)\right|^{m+1} \cdot M_t$

מסקנה: באינטרפולצית צ'בישב עם הנקודות המתאימות $t_0, t_1, \ldots, t_m$ נקבל שאם הפולינום הוא $p_m(t)$

אז השגיאה חסומה על ידי: $|r(t)| = |f(t) - p_m(t)| \le \frac{M_t}{(m+1)!}\left|\frac{b-a}{2}\right|^{m+1} \cdot \frac{1}{2^m}$

<u>דוגמה:</u>

רוצים לקרב את $f(t) = e^t$ בקטע $t \in [0,1]$ על ידי פולינום אינטרפולציה מסדר 5 ולהעריך את השגיאה. כלומר $a = 0$ ו $b = 1$ ו $m = 5$.

<u>פתרון:</u>

נשתמש בנקודות צ'בישב - האפסים של $T_6(x)$

$f^{(6)}(t) = e^t$ ולכן $M_t = e^1 = e$ - חסם על הנגזרת השישית בקטע הנתון.

לכן: $|r| \le \frac{e}{6!} \cdot \left|\frac{1-0}{2}\right|^6 \cdot \frac{1}{2^5} = 1.8 \cdot 10^{-6}$ - חסם על השגיאה בקטע הנתון.

חישוב פולינום האינטרפולציה:

א. שיטת ההפרשים המחולקים:

$$t = \frac{1}{2}(b-a)x + \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

i	$x_i = cos\frac{2i+1}{6} \cdot \frac{\pi}{2}$	$t_i = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}$	f_i	$[f,f]$			
0	x_0	$t_0 = c_0$					
1	x_1	t_1	c_1				
2	.	t_2		c_2			
3	.	t_3			c_3		
4	.	t_4				c_4	
5	.	t_5					c_5

$$p_5(t) = c_0 \cdot 1 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)(t-t_1) + \ldots + c_5(t-t_0)\cdot\ldots\cdot(t-t_4)$$

ב. חישוב הפולינום ב $-1 \le x \le 1$:

$f(t) = e^t \Rightarrow F(x) = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ נקבל: $p_5(x) \approx F(x)$

$$p_5(x) = c_0 \cdot T_0(x) + c_1 \cdot T_1(x) + \ldots + c_5 \cdot T_5(x)$$

אורתוגונאליות: אם $x_0, \ldots, x_5$ הם האפסים של $T_6(x)$

נגדיר מכפלה פנימית: $(f,g) = \sum_{i=0}^{5} f(x_i) \cdot g(x_i)$

נקבל: $c_j = \frac{(F,T_j)}{(T_j,T_j)} = \frac{(F,T_j)}{\|T_j\|^2}$

<u>מערכת פולינומים אורתוגונאליים</u>

נתונה המערכת המשולשת הבאה של פונקציות בסיס:

$$\varphi_0(x) = A_0$$
$$\varphi_1(x) = a_{10} + A_1 x$$
$$\dots$$
$$\varphi_n(x) = a_{n0} + a_{n1}x + \dots + A_n x^n$$

כאשר $A_i \neq 0$ לכל $i \in \{0,1,\dots,n\}$

בנוסף מוגדרת מכפלה פנימית (f,g).

מכפלה אורתוגונאלית $\perp$: $(f,g)=0$

<u>משפט</u>: קיימת מערכת אורתוגונאלית כנ"ל עבור כל מכפלה פנימית (חוקית).
המקדמים A_i נבחרים שרירותית (אבל שונים מ-0) ופרט לכך המערכת יחידה. $n=\infty$ במקרה רציף ו $n=m$ במקרה הבדיד בו המכפלה הפנימית מוגדרת על $m+1$ נקודות.

<u>הוכחה בונה א':</u>

נפעיל את גרהם שמידט על $A_0, A_1x, A_2x^2, \dots, A_nx^n$.

במקרה הבדיד $(f,g)=\sum_{i=0}^{m} f(x_i)\cdot g(x_i)\cdot w(x_i)$

עבור הנקודות $x_0, x_1, \dots, x_m$ הידועות ושונות זו מזו, ועבור פונקצית המשקל $w(x)$ הידועה.

נסתכל על הפולינום $\varphi_{m+1}(x) = A_{m+1}(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$

הפולינום הזה מתאפס בכל נקודות הדגימה. לכן הוא אורתוגונאלי עם כל שאר הפולינומים $\varphi_i(x)$.

הבעיה היא ש $\|\varphi_{m+1}\|=0$.

<u>משפט</u>: כל $\varphi_j(x)$ במשפחה הנ"ל אורתוגונאלי לכל $p_l(x)$ עבור $l \le j$.

<u>הוכחה:</u>

באופן יחיד $p_l(x) = a_l x^l + \dots + a_0 = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_l\varphi_l(x)$

נחשב מכפלה פנימית: $(p_l,\varphi_j) = c_0(\varphi_0,\varphi_j) + \dots + c_l(\varphi_l,\varphi_j)$

וכמובן שנקבל שכל האיברים מתאפסים ולכן $(p_l,\varphi_j) = c_0(\varphi_0,\varphi_j) + \dots + c_l(\varphi_l,\varphi_j) = 0$

כלומר, $p_l(x) \perp \varphi_j(x)$, כלומר הפונקציות אורתוגונאליות.

מקרה פרטי: $\varphi_j \perp 1, x, x^1, x^2, \dots, x^{j-1}$

<u>הוכחה בונה ב':</u>

נדרוש: $(\varphi_j, x^\alpha) = 0$ עבור $\alpha \in \{0,1,\dots,j-1\}$.

<u>דוגמה:</u>

מוגדרת המכפלה הפנימית: $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$,

כלומר מקרה רציף בו $a=-1$, $b=1$, $w(x)\equiv 1$.

לכן קיימת מערכת אורתוגונאלית אינסופית ביחס ל $\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$

רוצים לדעת מהו $\varphi_2(x)$.

נגדיר: $\varphi_2(x)=x^2+a_{21}x+a_{20}$ (בחרנו $A_2=1$). הנעלמים הם a_{21} ו a_{20}.

דורשים: $(\varphi_2,x^\alpha)=0$ עבור $\alpha\in\{0,1\}$.

כלומר: $\int_{-1}^{1}\left(x^2+a_{21}x+a_{20}\right)x^\alpha dx=0$ עבור $\alpha\in\{0,1\}$

עבור $\alpha=0$ נציב ונקבל: $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}a_{21}x^2+a_{20}x\Big|_{-1}^{1}=0$ ונקבל $a_{20}=-\frac{1}{3}$.

עבור $\alpha=1$ נקבל $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3a_{21}+\frac{1}{2}x^2a_{20}\Big|_{-1}^{1}=0$ ונקבל $a_{21}=0$.

לכן: $\varphi_2(x)=\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\cdot A_2$. מכאן ניתן לבחור כל $A_2\neq 0$ באופן שרירותי.

לפולינום אורתוגונאלי $\varphi_n(x)$ ביחס ל $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$ יש n שורשים ממשיים שונים בקטע (a,b).

הוכחה: <u>בסתירה</u>

מתקיים: $\varphi_n(x)=(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\cdot...\cdot(x-\alpha_{n-1})$ עבור השורשים $\alpha_0,...,\alpha_{n-1}$.

נניח ש $\alpha_0\notin(a,b)$ ושאר השורשים כן בקטע הנ"ל.

נגדיר את הפולינום הבא: $\psi_{n-1}(x)=(x-\alpha_1)\cdot...\cdot(x-\alpha_{n-1})$.

נכפיל בין שני הפולינומים ונקבל: $\varphi_n(x)\psi_{n-1}(x)=(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)^2\cdot...\cdot(x-\alpha_{n-1})^2$

נחשב את המכפלה הפנימית של שני הפולינומים:

$$(\varphi_n,\psi_{n-1})=\int_a^b\varphi_n\psi_n w(x)dx=\int_a^b(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)^2\cdot...\cdot(x-\alpha_{n-1})^2 w(x)dx$$

המכפלה הזאת צריכה להיות 0 כי מדובר במכפלה בין φ_n לפולינום מדרגה נמוכה יותר.

אבל כל האיברים מהצורה $(x-\alpha_i)^2$ הם חיוביים (מלבד מספר פעמים סופי שבהם הם מתאפסים), וגם $(x-\alpha_0)$ שומר על סימן בקטע (a,b) ולכן נקבל אינטגרל על ערך חיובי ($w(x)$ לעולם לא שלילי) ולכן האינטגרל לא יתאפס ולכן קיבלנו סתירה.

נניח ש α_0 הוא שורש מרובה. במקרה זה: $\varphi_n(x)=(x-\alpha_0)^q(x-\alpha_1)\cdot...$ כאשר $q\geq 2$.

נוכל לרשום: $\varphi_n(x)=(x-\alpha_0)^2\cdot\psi_{m-2}(x)$

אם נחשב את המכפלה הפנימית $(\varphi_n,\psi_{n-2})=\int_a^b(x-\alpha_0)^2\psi_{n-2}^2 w(x)dx$ ובאופן דומה נקבל שהביטוי הזה גם לא יכול להתאפס בסתירה לאורתוגונאליות של $\varphi_n(x)$ עם כל פולינום מדרגה נמוכה יותר.

עבור שורשים מרוכבים: $\left[x-\underbrace{(a+ib)}_{a_0}\right]\left[x+\underbrace{(a-ib)}_{a_1}\right]=x^2-2ab+a^2+b^2$

גם כאן המכפלה הפנימית לא תתאפס.

מה קורה כאשר המכפלה הפנימית היא בדידה ולא רציפה?

<u>פולינום האינטרפולציה של הרמיט Hermite - מורחב, נושק, אוסקולטורי</u>

נתונות נקודות דגימה שונות זו מזו: $x_0, x_1, \ldots, x_m$

עד כה ידענו את ערכי הפונקציה בנקודות הדגימה: $f_0, f_1, \ldots, f_m$.

כעת נניח שאנחנו יודעים גם את הנגזרת של הפונקציה בנקודות הדגימה: $f_0', f_1', \ldots, f_m'$.

רוצים למצוא פולינום שמקיים $p(x_i)=f_i$ וגם $p'(x_i)=f_i'$.

יש לנו $2m+2$ נתונים ולכן נצפה שהפולינום יהיה מדרגה $2m+1$, כלומר $p_{2m+1}(x)$.

נשתמש בנוסחה: $p(x)=p_{2m+1}(x)=\sum_{j=0}^{m}\left[h_j(x)f(x_j)+\bar{h}_j(x)f'(x_j)\right]$

כאשר: $h_j(x)=\left\{1-2(x-x_j)\delta_j'(x_j)\right\}\delta_j^2(x)$

$$\bar{h}_j(x)=(x-x_j)\delta_j^2(x)$$

$$\delta_j(x)=k_j(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$$

$$(k_j)^{-1}=(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_m)$$

מה אם ידועות לנו נגזרות מסדר גבוה יותר - לכל נקודת דגימה עד סדר משלה - $f^{(\nu_i)}$?

במקרה כזה קיים פולינום קולוקציה מתאים: $p_N(x)$ כאשר $N=m+\sum_{i=0}^{m}\nu_i$.

הרמיט הוא מקרה פרטי בו לכל $i\in\{0,1,\ldots,m\}$ מתקיים $\nu_i=1$.

השגיאה חסומה על ידי:

$$|r(x)|=|f(x)-p_N(x)|\le\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{1+\nu_0}(x-x_1)^{1+\nu_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{1+\nu_m}$$

עבור $\xi\in int(x,x_0,x_1,\ldots,x_m)$.

<u>הפרשים מחולקים</u>

$$p_m(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots$$

כאשר הנקודות מאוד קרובות נקבל:

$$p_m(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_3)^3+\ldots$$

זה מזכיר טור טיילור: $f(x)=f_0+f_0'(x-x_0)+\frac{1}{2}f_0''(x-x_0)^2+\ldots$

$$f\underbrace{[x_0,x_0,\ldots,x_0]}_{n-times}\to\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

נניח שבנקודה הראשונה x_0 נתונים ערך הפונקציה f_0 וערך הנגזרת f_0' .
בנקודות אחרות נתונים דברים אחרים.
נחשב טבלת הפרשים מחולקים, כאשר נרשום את הנקודה הראשונה פעמיים.
כעת כאשר יש צורך לחשב $\frac{f_0 - f_0}{x_0 - x_0}$ שלכאורה אינו מוגדר, נשתמש במקום זאת בנגזרת, f_0' .

x_0	f_0	$f[x,x]$					
x_0	f_0	$\frac{f_0 - f_0}{x_0 - x_0} = f_0'$					
x_1	f_1	$\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$					
x_2	f_2						

$$p_m(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2$$

דוגמה: רוצים לקרב את הפונקציה $f(x) = sin(x)$ כאשר נתון המידע הבא:

$x_0 = 0$, $f_0 = 0$, $f_0' = 1$, $f_0'' = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $f_1 = 1$. נחשב את $p_3(x)$ בשיטת ההפרשים המחולקים.

x	f	$f[x,x]$	$f[x,x,x]$	$f[x,x,x,x]$
$x_0 = 0$	$f_0 = 0$			
$x_0 = 0$	$f_0 = 0$	$f_0' = 1$		
$x_0 = 0$	$f_0 = 0$	$f_0' = 1$	$\frac{1}{2} f_0'' = 0$	
$x_1 = \pi/2$	$f_1 = 1$	$\frac{1-0}{\pi/2 - 0} = \frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) = B$	$\frac{B-0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) = C$

לכן נקבל: $f^*(x) = p_3(x) = 0 + 1\cdot(x-0) + 0(x-0)(x-0) + C(x-0)(x-0)(x-0)$