תזכורת:

המטרה המקורית הייתה לפתור את המשוואה $f(x)=0$, כלומר למצוא מהו ה- x שמקיים זאת.

ננסה ניסוח מהצורה: $x=\varphi(x)$.

נבצע איטרציות: $x_1=\varphi(x_0), x_2=\varphi(x_1),...$, ובאופן כללי $x_{n+1}=\varphi(x_n)$

אם $x_0, x_1,..., x_n$ סדרה מתכנסת, אז פתרנו את המשוואה.

נקודת השבת של הניסוח $x=\varphi(x)$ הוא פתרון של המשוואה המקורית.

<u>המשפט של קטע סימטרי סביב השורש:</u>

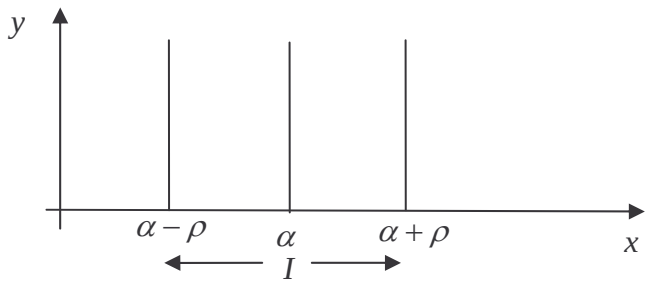
נתון: למשוואה $x=\varphi(x)$ יש שורש (פתרון) $x=\alpha$ ונתונים המרווחים הסימטריים סביב α:

$I=[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$, $J=(\alpha-\rho,\alpha+\rho)$ עבור $(\rho>0)$.

אם מתקיים: $|\varphi'(x)|\le m<1$ לכל $x\in J$ אז עבור $x_0\in I$ האיטרציה הנ"ל מקיימת:

1. כל $x_n\in J$ עבור $n=1,2,3,...$.
2. $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$.
3. α יחיד ב I.

בצורה גראפית:



הוכחה:

1. באמצעות משפט ערך הביניים: $x_n-\alpha=\varphi(x_{n-1})-\varphi(\alpha)=\varphi'(\xi)(x_{n-1}-\alpha)$ עבור $\xi\in(x_{n-1},\alpha)$.

בערך מוחלט: $|x_n-\alpha|=|\varphi'(\xi)||(x_{n-1}-\alpha)|$

עבור $n=1$ נקבל: $|x_1-\alpha|=|\varphi'(\xi)||(x_0-\alpha)|$, $\xi\in J$.

2. מכיוון שמתקיים $|\varphi'(x)|\le m<1$, נקבל: $|x_1-\alpha|<|(x_0-\alpha)|$

באינדוקציה נקבל: $|x_n-\alpha|<|x_{n-1}-\alpha|<...<|x_1-\alpha|<|x_0-\alpha|$

או ליתר דיוק: $|x_n-\alpha|\le m|x_{n-1}-\alpha|\le...\le m^n|x_0-\alpha|$

לכן: $\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0$

3. הוכחה ע"י סתירה: נניח שקיימים שני שורשים בקטע I: $\alpha\ne\beta$. $\varphi(\alpha)=\alpha$, $\varphi(\beta)=\beta$.

נפעיל את משפט ערך הביניים: $\alpha-\beta=\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)=\varphi'(\xi)(\alpha-\beta)$ עבור $\xi\in J$.

כלומר: $|\alpha-\beta|=|\varphi'(\xi)||\alpha-\beta|\le m|\alpha-\beta|$. מכיוון ש m קטן מ-1, נקבל $\alpha-\beta=0$.

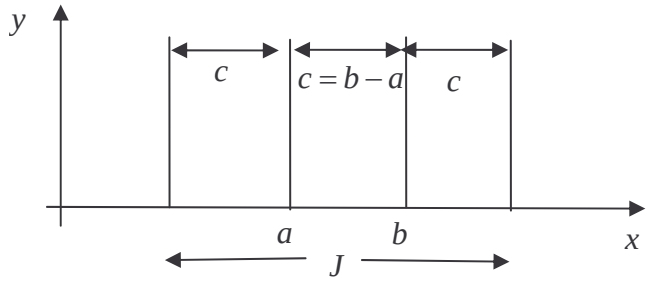
למה: ידוע שיש שורש ל $x=\varphi(x)$, $\alpha\in I=[a,b]$

מגדירים מרווח $J=(2a-b,2b-a)$

מבצעים איטרציות עם $x_0\in I$.

אם $|\varphi'(x)|\le m<1$ לכל $x\in J$ אז התנאים מהמשפט הקודם מתקיימים:

1. כל $x_n\in J$ עבור $n=1,2,3,\ldots$.
2. $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$.
3. α יחיד ב I.



נחזור לדוגמה מהשיעור הקודם:

$$f(x)=x^3-x-5=0$$

$$x=(x+5)^{\frac{1}{3}}=\varphi_2(x)$$

נתון: $\alpha\in[1.5,2]$. איך יודעים שיש שם שורש?

$f(1.5)=-3.125$, $f(2)=1$ כלומר הפונקציה מחליפה סימן בקטע, ולכן מצפים שיהיה לה שורש באמצע.

נסמן: $\alpha\in[1.5,2]=I$. לכן $J=(1.0,2.5)$

$$|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{3(5+x)^{\frac{2}{3}}}\right|$$

טענה: $|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{3(5+x)^{\frac{2}{3}}}\right|<\frac{1}{3}=m<1$ לכל $x\in J$. (הנגזרת קטנה ממש מ 1 בכל הקטע).

מסקנה: עבור כל $x_0\in I$, האיטרציה תתכנס לשורש α.

למה: מהו סדר (קצב) ההתכנסות p ?

משפט: אם $\varphi(x)$ גזירה מספר מספיק של פעמים בסביבת α וידוע: $\varphi^{(j)}(\alpha)=0$ עבור $j=1,2,\dots p-1$ ו $\varphi^{(p)}(\alpha)=const\neq 0$ אז p הוא סדר ההתכנסות ו $\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\alpha)$ הוא קבוע השגיאה האסימפטוטי.

הוכחה: $x_{n+1}=\varphi(x_n)=\varphi(\alpha)+\sum_{j=1}^{p-1}\varphi^{(j)}(\alpha)\frac{(x_n-a)^j}{j!}+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_n-\alpha)^p$

עבור $\xi\in(x_n,\alpha)$ - פיתוח טיילור סביב הנקודה α.

אבל $\varphi^{(j)}(\alpha)=0$ לכל $j=1,2,\dots p-1$ ולכן:

$$x_{n+1}=\varphi(\alpha)+\cancel{\sum_{j=1}^{p-1}\varphi^{(j)}(\alpha)\frac{(x_n-a)^j}{j!}}+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_n-\alpha)^p=\varphi(\alpha)+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_n-\alpha)^p$$

כלומר: $x_{n+1}-\varphi(\alpha)=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_n-\alpha)^p$

נקבל:

$$\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right|=\left|\frac{x_{n+1}-\varphi(\alpha)}{(x_n-\varphi)^p}\right|=\left|\frac{\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)\cancel{(x_n-\alpha)^p}}{\cancel{(x_n-\varphi)^p}}\right|=\left|\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)\right|\xrightarrow{n\to\infty,\xi\to\alpha}\left|\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\alpha)\right|>0$$

אם נחזור לדוגמה הקודמת, $|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{3(5+x)^{\frac{2}{3}}}\right|$, נקבל שהנגזרת לא מתאפסת בשורש, ולכן $p=1$.

שיטת ניוטון רפסון: $f(x)=0$, $f'(x)\neq 0$.

$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, כלומר: $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$.

נקבל: $\varphi'(x)=\dots=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$, $\varphi'(\alpha)=\frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2}=0$ מסקנה: $p\geq 2$.

$$\varphi''(\alpha)=\dots=\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

אם זה שונה מאפס אז $p=2$. (מה שיקרה בדרך כלל בשיטת ניוטון רפסון)

אם זה שווה לאפס אז $p\geq 3$.

דוגמה: $f(x)=(x-\alpha)^q$ עבור $q\geq 2$ מספר טבעי.

למשוואה הזאת יש q שורשים.

$f'(x)=q(x-\alpha)^{q-1}$, $f''(x)=q(q-1)(x-\alpha)^{q-2}$

נקבל: $\varphi'(\alpha)=1-\frac{1}{q}$ וזה שונה מאפס כי $q\geq 2>1$

אקסטרפולציה Aitkem

אקסטרפולציה - תהליך שבאמצעותו מסיקים מסקנות או מעריכים ערך של משתנה שהוא מחוץ לתחום החישוב על סמך מידע שהושג בתחום החישוב.

מחשבים $x_1, x_2, ..., x_{j-2}, x_{j-1}, x_j$ באמצעות שיטה איטרטיבית מסדר ראשון, $p=1$.

$$\frac{x_j-\alpha}{x_{j-1}-\alpha} \approx \frac{x_{j-1}-\alpha}{x_{j-2}-\alpha} = C?$$

$x_j' = x_j - \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{x_j - 2x_{j-1} + x_{j-2}}$ האקסטרפולציה באמצעו שלוש האיטרציה האחרונות.

ניתן להוכיח ש x_j' קרוב יותר לשורש מאשר x_{j+1}.

נדגיש: הדבר פועל רק כאשר עובדים באיטרציה **מסדר ראשון**!

שגיאה ודיוק באיטרציה חד נקודתית

$x_0, \tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n$ - יש שגיאות חישוב בכל איטרציה ולכן לא נקבל באמת את $x_1, ..., x_n$.

$$\alpha = \varphi(\alpha) \qquad , \tilde{x}_{n+1} = \varphi(\tilde{x}_n) + \delta_n$$

נקבל: $\tilde{x}_{n+1} - \alpha = \varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(\alpha) + \delta_n = \varphi'(\xi_n)(\tilde{x}_n - \alpha) + \delta_n$ עבור $\xi_n \in (x_n, \alpha)$.

נחסיר $\varphi'(\xi_n)\tilde{x}_{n+1}$ משני האגפים ונקבל:

$$\left[1-\varphi'(\xi_n)\right](\tilde{x}_{n+1}-\alpha) = \varphi'(\xi_n)(\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n+1})\delta_n$$

נניח: $|\varphi'(\xi_n)| \le m < 1$ ונניח $|\delta_n \le |\delta$

ונקבל: $|\tilde{x}_{n+1} - \alpha| \le \frac{m}{1-m}|\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n| + \frac{\delta}{1-m}$ - מרחק מהשורש.

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x) = x + e^{-2x} - 1 = 0$ ומחפשים עבורה שורש $\alpha \in [0.6, 0.8]$ באמצעות האיטרציה הבאה: $x_{n+1} = \varphi(x_n) = 1 - e^{-2x_n}$.

1. האם x_n מתכנס ל α?
2. אם כן, לבצע 4 איטרציות עם $x_0 = 0.8$ ולהעריך מרחק מהשורש.

יש חילוף סימן: $f(0.6)\cdot f(0.8) < 0$. נרחיב את הקטע ל: $J = (0.4, 1)$

נגזור ונקבל: $|\varphi'(x)| = |2e^{-2x}| < 0.99$ עבור $x > 0.35$, כלומר עבור $x \in J = (0.4, 1)$

נקבל: $x_0 = 0.8$, $\tilde{x}_1 = 0.798$, $\tilde{x}_2 = 0.7973$, $\tilde{x}_3 = 0.79701$, $\tilde{x}_4 = 0.79689$.

כלומר: $\tilde{x}_4 - \tilde{x}_3 = -12\cdot 10^{-5}$. $\delta = 0.5\cdot 10^{-5}$

$m = ?$ טענה: $m = |\varphi'(\tilde{x}_3)| = 0.41$ (צריך לבדוק את זה)

נקבל: $|\tilde{x}_4 - \tilde{x}_3| \le \frac{0.41}{0.59}\cdot 12\cdot 10^{-5} + \frac{0.5\cdot 10^{-5}}{0.59} \approx 9.2\cdot 10^{-5}$ - המרחק מהשורש.

$$\varphi'(\xi_3) = \varphi'(x_3 + \Delta x) = \varphi'(x_3) + \varphi''(x_3)(\Delta x)^2 + ...$$

$\Delta x = \xi_3 - \tilde{x}_3$ $\xi_3 \in (\tilde{x}_3, \alpha)$ לכן $|\Delta x_3|_{\max} = |\tilde{x}_3 - \alpha| = ?$

$\tilde{x}_3 - \alpha = \tilde{x}_4 - \alpha + \tilde{x}_4 - \tilde{x}_3$ $|\tilde{x}_3 - \alpha| \le \underbrace{|x_4 - \alpha|}_{9.2\cdot 10^{-5}} + \underbrace{|\tilde{x}_4 - \tilde{x}_3|}_{12\cdot 10^{-5}} \approx 2\cdot 10^{-4}$

הנחו: $m = 0.41$. כלומר עיגלנו אותו לשתי ספרות משמעותיות.

<u>דיוק בר השגה:</u> יש שגיאה שאותה לא נוכל לעבור במהלך האיטרציות, ללא תלות בשיטת האיטרציות.

$\left|\tilde{x}_{n+1}-\alpha\right| \le \frac{\delta}{1-m}$ אם $\tilde{x}_{n+1}-\tilde{x}_n \longrightarrow 0$ עבור איטרציה מסוימת.

אנחנו חושבים שאנחנו מחשבים $f(x)$ אבל בפועל אנחנו מחשבים $\tilde{f}(x)$.

יודעים ש $\left|\tilde{f}(x)-f(x)\right| \le \delta$ עבור δ כלשהו.

במקום למצוא x_n כך ש $f(x_n)=0$, אנחנו מוצאים x_n כך ש $\tilde{f}(x_n)=0$

במקרה זה, אנחנו יודעים ש $\left|f(x_n)\right| \le \delta$

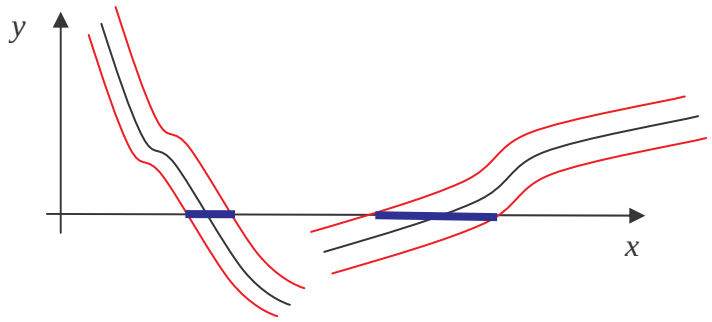
נפתח את $f(x_n)$ לטור טיילור:

$$f(x_n)=\underbrace{f(\alpha)}_{=0}+f'(\alpha)(x_n-\alpha)+\ldots$$

נניח $f'(a)\neq 0$.

נקבל: $\left|x_n-\alpha\right| \le \frac{\delta}{f'(\alpha)}=\varepsilon_\alpha$ - ערך זה, ε_α נקרא **דיוק בר השגה**.

נניח שיש לנו שתי פונקציות ורוצים למצוא את השורש של שתיהן.



כלומר, ככל שהשיפוע של הפונקציה יותר גדול, כך ההחטאה שלנו במציאת מיקום השורש, קטנה יותר.

מה עושים אם $f'(a)=0$?

מחשבים איברים נוספים. נקבל: $\varepsilon_\alpha=\left|\frac{q!}{f^{(q)}(\alpha)}\right|^{\frac{1}{q}}\cdot\delta^{\frac{1}{q}}$

זה קורה כאשר α הוא שורש מריבוי q.

הביטוי $\delta^{\frac{1}{q}}$ מראה שהבעיה היא $ill-condition$. עבור q גדול מתקבל ש $\delta^{\frac{1}{q}}\to 1$

מסקנה: חישוב שורש מרובה עלול להיות תהליך חולני.

<u>שורש מרובה:</u>

כאשר מתקיים ש $f(x)=(x-\alpha)^q\cdot g(x)$ כך ש $q\ge 2$ ו $\infty > g(\alpha)\neq 0$

אז α הוא שורש מריבוי q. נדבר רק על ריבוי שלם, כלומר q הוא מספר טבעי.

לדוגמה: $f(x)=\alpha\cdot sin(x)$, $\alpha=0$, $q=2$.

$f(x)=(x-0)^2\cdot\left(\frac{sin(x)}{x}\right)$, $g(\alpha)=1$.

אם נטען שהפונקציה הזאת זהה ל: $f(x)=(x-0)^3\cdot\frac{(sin(x))}{x^2}$ ולכן $q=3$ אז נקבל $g(\alpha)\to\infty$.

$q=1$? לא, כי אז $g(x)=sin(x)$ ולכן $g(\alpha)=0$.

$$f'(\xi)=q(x-\alpha)^{q-1}+(x-\alpha)^1\cdot g'(\alpha),\ f'(\alpha)\neq 0$$
$$f^{(q-1)}(\alpha)=0\ldots f''(\alpha)=0$$
$$f^{(q)}(\alpha)=q!g(a)\neq 0$$