תזכורת: דיברנו על חישוב: $y = y\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ כאשר $x_1, x_2, ..., x_n$ הם נתוני הקלט, ומתקבל לנו $\tilde{y}$ הכולל שגיאה Δy. השגיאה נובעת משני מקורות: Δy_{IN} כתוצאה מהשגיאה בנתוני הקלט, ו Δy_A כתוצאה משגיאה באלגוריתם. $\Delta y = \Delta y_{IN} + \Delta y_A$.

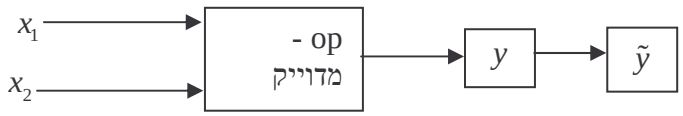
כעת נדבר על Δy_A - השגיאה מהאלגוריתם.
מבצעים חישובים עם נקודה צפה, *floating point operation*.
מקום האכסון של המספרים במחשב הוא מוגבל.
מספר a מאוכסן במחשב באופן הבא: $\tilde{a} = (\pm) m \times 10^q$.
כלומר המחשב שומר עבור המספר שני ערכים: q, m.
q הוא מספר שלם. המגבלה עליו קובעת את תחום המספרים שניתן לאחסן במחשב. לא נתעסק בבעיות הנובעות כתוצאה מהמגבלה הזאת. $q \approx 2000$.
$0.1 \le m < 1$ - במנטיסה זו יש מספר מוגבלת של ספרות - t ספרות במנטיסה, בהעגלה.
$\left|\frac{\Delta m}{m}\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{1-t} = u$ - השגיאה היחסית חסומה מלמעלה על ידי u - יחידת הדיוק של המחשב.
u נקרא: *machine unit* או *round off unit*.

משפט: כל מספר ממשי בתחום המשתנים הצפים ניתן לאחסון עם **<u>שגיאה יחסית</u>** לא גדולה מ u.
טיפוסית: $u \approx 10^{-7}$ בחישוב רגיל *single*.
בחישוב *double*: $u \approx 10^{-16}$.

איך מוצאים את u? הכי פשוט, להסתכל בהגדרות של היצרן של המחשב.

מה זה אומר מבחינתנו? כאשר אנחנו מנסים לבצע חישובים, יהיו לנו העגלות למנטיסה הממשית, וצריך להתחשב בהן בחישובים.

<u>"מודל"</u> של מחשב: קיימת יחידה אריתמטית. נכנסים אליה מספרים. מתבצעים ביחידה האריתמטית חישובים פשוטים, הנקראים op (חישובים כמו חיבור, חיסור, כפל וחילוק). מניחים שהחישובים מתבצעים בצורה מדויקת. אלא מה - התוצאה של החישוב מאוכסנת במנטיסה הממשית, ולכן מתבצעת שם העגלה.



$$\left|\frac{\Delta y_A}{y}\right| = \frac{op\left(x_1, x_2\right) - fl\left(op\left(x_1, x_2\right)\right)}{op\left(x_1, x_2\right)} \le u$$

הערכת Δy_A: צוברים את השגיאות היחסיות u או אחרת אם נאמר, לכל פעולה בחישוב ומפשטים את התוצאה.

דוגמה:
רוצים לחשב: $y = \left(1 + x^3\right)^{\frac{1}{2}}$ עבור $x > -1$.
רוצים להעריך מהי השגיאה היחסית שמתקבלת בחישוב - $\left|\frac{\Delta y_A}{y}\right|$

מצפים שהתוצאה תהיה בערך $u\cdot f(x)$ - פונקציה של x כפול u.

נפרק את החישוב לפעולות יסודיות:
א. העלאת x בחזקת 3 - חישוב x^3. נניח שזה מתבצע בפעולה אחת.
ב. פעולת החיבור - $1+x^3$.
ג. הוצאת שורש: $\sqrt{1+x^3}$.

בחישוב במחשב נקבל:
א. במקום x^3 נקבל $x^3(1\pm u)$
ב. פעולת החיבור תתבצע על השגיאה מהתוצאה הקודמת: $1+x^3(1\pm u)$.
התוצאה תעוגל גם כן: $(1\pm u)\cdot\left(1+x^3(1\pm u)\right)$
ג. פעולת הוצאת השורש תתבצע על התוצאות (השגויות) מהחישובים הקודמים וגם כאן עלולה להיווסף שגיאה חדשה. התוצאה הסופית היא: $\tilde{y}=(1\pm u)\cdot\sqrt{(1\pm u)\cdot\left(1+x^3(1\pm u)\right)}$

מהו גודל השגיאה? $\tilde{y}=(1+u)\left\{(1+u)\left[1+x^3+u\left|x^3\right|\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$
מניחים ש $u<<1$.
טענה: $(1+u)^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}u$ - האיבר שהזנחנו הוא בסדר גודל של u^2, כלומר קטן בהרבה.
הסבר (תזכורת מחדו"א): משתמשים בפיתוח $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\ldots$
עבור $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ נקבל: $f(u)=1+\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}f''(0)u^2+\ldots$. נזניח את כל האיברים מסדר גודל גדול מ 2 (כלומר $u^2,u^3,\ldots$ ונקבל $(1+u)^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}u$.
$(1+u)\left(1+\frac{1}{2}u\right)\approx 1+\frac{3}{2}u$ גם כאן מזניחים את האיברים מסדר גודל של u^2.
נקבל:

$$\tilde{y}=(1+u)\left\{(1+u)\left[1+x^3+u\left|x^3\right|\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\approx\left(1+\frac{3}{2}u\right)\left\{1+x^3+u\left|x^3\right|\right\}^{\frac{1}{2}}\approx\left(1+\frac{3}{2}u\right)\underbrace{\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}}_{y}\underbrace{\left\{1+u\frac{\left|x^3\right|}{1+x^3}\right\}^{\frac{1}{2}}}_{\approx 1+\frac{1}{2}u\frac{\left|x^3\right|}{1+x^3}}$$

סה"כ: $\left|\frac{\tilde{y}}{y}\right|\approx 1+\frac{3}{2}u+\frac{1}{2}u\frac{\left|x^3\right|}{1+x^3}\approx 1+\frac{u}{2}\left[3+\frac{\left|x^3\right|}{1+x^3}\right]$
תזכורת: $\frac{\Delta y}{y}=\frac{\tilde{y}-y}{y}=\frac{\tilde{y}}{y}-1$
נחזור למשוואה הקודמת ונעביר את ה- 1 לאגף השמאלי ונקבל: $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|\approx u\cdot\frac{1}{2}\left[3+\frac{\left|x^3\right|}{1+x^3}\right]$
נשים לב שכאשר x קרוב ל -1 השגיאה היחסית שואפת לאינסוף.

מהי השגיאה היחסית הכוללת המקסימאלית?

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{total} = \left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{IN} + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|_{A} = Cp\left(\frac{\Delta x}{x}\right)_{IN} + u\cdot\frac{1}{2}\left(3+\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right|\right)$$

$Cp = \frac{3}{2}\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right|$ (מההרצאה הקודמת)

לינאריזציה:

$y = sin\left(x^2\right)$ עבור $0 < x^2 < \pi$. רוצים לחשב כמה יצא $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|_A$.

הפעולות הן:

א. חישוב x^2 - מקבלים $(1\pm u)\left(x^2\right)$

ב. חישוב הסינוס: $\tilde{y} = (1\pm u)\,sin\left((1\pm u)\left(x^2\right)\right)$

נניח שהשגיאות מעלות את התוצאה כלפי מעלה: $\tilde{y} = (1+u)\,sin\left((1+u)\left(x^2\right)\right)$

כעת יש לפשט את הביטוי.

$sin\left(x^2+ux^2\right)$ - מניחים ש $u << 1$.

נבצע פיתוח לטור טיילור: $\underbrace{sin(a+\delta)}_{f(a+\delta)} = \underbrace{sin(a)}_{f(a)} + \underbrace{cos(a)\cdot\delta}_{f'(a)\cdot\delta} + O\left(\delta^2\right)$

בחישוב שלנו: $a = x^2$ ו $\delta = ux^2$

$$sin\left(x^2+ux^2\right) \approx sin\left(x^2\right) + \left|cos\left(x^2\right)\right| ux^2$$

$$\tilde{y} = (1+u)\left[sin\left(x^2\right)+ux^2\left|cos\left(x^2\right)\right|\right] = (1+u)\,sin\left(x^2\right)\left[1+ux^2\left|\cot\left(x^2\right)\right|\right] = y\left(1+u\left[1+x^2\left|\cot\left(x^2\right)\right|\right]\right)$$

נחלק את שני האגפים ב y ונקבל: $\frac{\tilde{y}}{y} = \left(1+u\left[1+x^2\left|\cot\left(x^2\right)\right|\right]\right)$

נחסיר 1 ונקבל: $\left|\frac{\tilde{y}}{y}-1\right| = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = u\left[1+x^2\left|\cot\left(x^2\right)\right|\right]$

<u>פתרון של משוואות לא ליניאריות</u>

נתונה פונקציה $f(x)$ ורוצים למצוא עבור איזה x נקבל $f(x)=0$. לערך הזה של x קוראים שורש.

המשוואה הלא ליניארית היא $f(x)=0$.

לדוגמה: $f(x)=x-e^{-x}=0$ $\qquad$ $f(x)=x^2-2=0$

<u>שיטה איטרטיבית:</u>

<u>הנחות:</u>

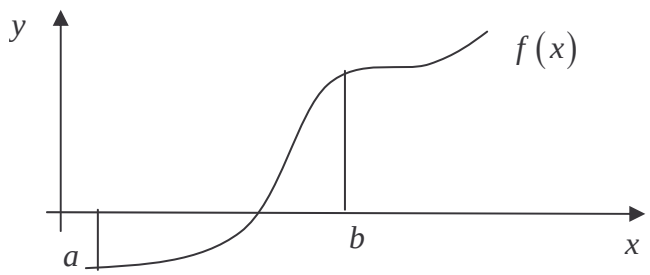
1. α - שורש - מניחים שהוא ממשי.
2. $f(x)$ רציפה (לפעמים נניח שגם הנגזרת הראשונה $f'(x)$ רציפה ולפעמים גם השניה $f''(x)$)
3. α - יחיד בקטע.
4. α שורש "פשוט" *simple part*, כלומר $f'(\alpha)\neq 0$

עבור $f(x)=(x-1)^3=0$ נקבל $\alpha=1$ עם ריבוי 3.

נבצע סדרה של קירובים איטרטיביים ל α: $\qquad \{x_0,x_1,...,x_n\}\to\alpha$

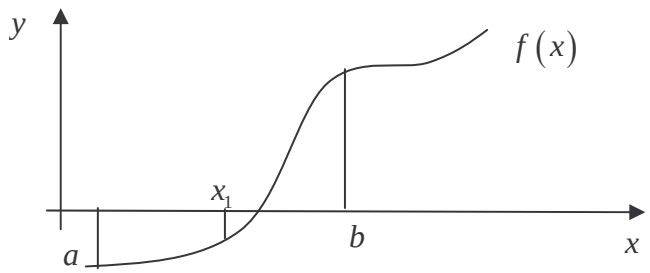
נגדיר: $\varepsilon_n=x_n-\alpha$ - השגיאה באיטרציה n.

<u>שיטת החצייה:</u> *bisection*

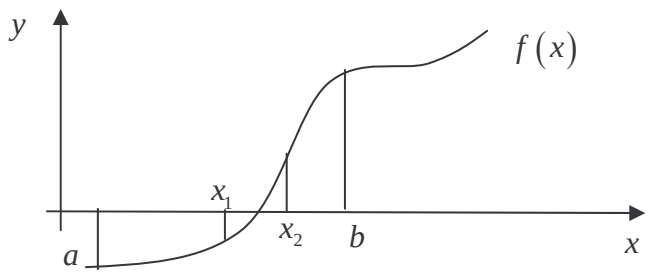


נתון הקטע $[a,b]$ ומתקיים $f(a)\cdot f(b)<0$ - זהו תנאי הכרחי להפעלת השיטה.

חוצים את הקטע לשני חלקים באמצעות $x_1=\frac{1}{2}(a+b)$:



כעת זורקים את הקטע שבו הסימן של x_1 זהה לסימן של הקצה השני של הקטע. בדוגמה הנ"ל, זורקים את הקטע $[a,x_1]$ ומבצעים איטרציה שניה על הקטע הנותר $[x_1,b]$:

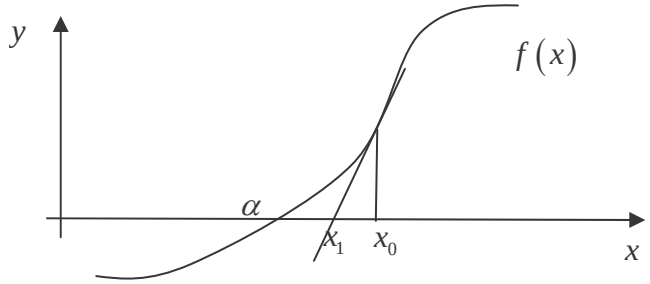


במקרה זה $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+b\right)$ כעת זורקים את b כי $f\left(x_2\right)\cdot f\left(b\right)>0$ וממשיכים איטרציה נוספת עם הקטע $\left[x_1,x_2\right]$.

נקבל: $\left|\varepsilon_n\right|\le\left|\frac{b-a}{2^n}\right|$ - חסם על השגיאה באיטרציה ה n.

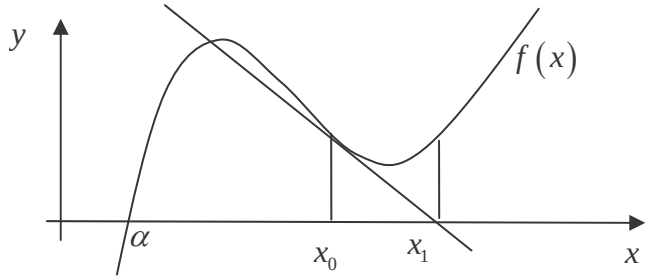
האם מובטחת התכנסות של השגיאה? כן $\lim_{n\to\infty}\left(x_n-\alpha\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\varepsilon_n\right)=0$, כי החסם על השגיאה מתכנס.
מהו קצב (סדר / מהירות) ההתכנסות?

<u>שיטת ניוטון - רפסון</u> *Newton Raphson* (NR)



השיטה: בוחרים x_n - מחשבים את $f\left(x_n\right)$ ובוחרים ב x_{n+1} בנקודה שבה המשיק לנקודה x_n פוגע בציר ה- x. כלומר: $x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$ עבור $n=0,1,2,...$
זוהי שיטה חד-נקודתית (בניגוד לשיטה הקודמת שהייתה דו-נקודתית)

התכנסות לא מובטחת:



בחרנו את x_0 בצורה לא טובה, וקיבלנו x_1 רחוק יותר מ α.

הגדרה: נניח $x_0, x_1, ..., x_n$ סדרה מתכנסת ל α. אם קיימים $p \geq 1$ ו $c > 0$ כל ש: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varepsilon_{n+!}}{\varepsilon_n{}^p}\right| = c$

אז p הוא סדר ההתכנסות ו c הוא קבוע השגיאה האסימפטוטי.

הערה: עבור $p = 1$, $0 < c < 1$.

בשיטת ניוטון רפסון בדרך כלל $p \geq 2$.

נבצע פיתוח טיילור סביב הנקודה x_n:

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)\cdot(\alpha - x_n) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(\xi)(\alpha - x_n)^2}_{\text{שארית}} = 0 \qquad \xi \in (x_n, \alpha)$$

נחלק את המשוואה ב $f'(x_n)$ (בהנחה שהוא שונה מאפס) ונעביר את האגף האחרון אגף.

נקבל: $$\underbrace{\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n\right)}_{-x_{n+1}} + \alpha = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$$

הגדרה: $\varepsilon_n = x_n - \alpha$

נקבל: $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}\cdot\varepsilon_n{}^2$

אם יש התכנסות ($\xi \to \alpha$ ו $x_n \to \alpha$) אז $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$

אם $c \neq 0$ אז $p = 2$

אם $c = 0$ ($f''(\alpha) = 0$) אז $p \geq 3$ - כלומר ההתכנסות עוד יותר מהירה!

אם קיימת סביבה (סימטרית) סביר α שבה $\frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(y)} < m$ עבור m קבוע, לכל x, y בסביבה, אז תהיה התכנסות בשיטת ניוטון רפסון.