<u>אנליזה נומרית</u> - עוסקת בשיטות לקבלת פתרון מספרי לבעיות המנוסחות בצורה מתמטית.
(הדגש הוא על שיטות יעילות למחשב ספרתי)

לדוגמה, למצוא מהו x המקיים $x = e^{-x}$. רוצים למצוא $x = \alpha$ כלשהו. $x = 0.567...$ הוא הפתרון.
דוגמה נוספת, לחשב את האינטגרל: $I = \int_1^2 \left(\ln(t)\right)^{3.5} dt$ הפתרון הוא $I = 0.0753...$.
דוגמה נוספת: נתונה מערכת משוואות בצורת מטריצה: $A\bar{x} = \bar{b}$, $n = 50$, $\det(A) \neq 0$ ורוצים למצוא מהו $\bar{x}$.

<u>מטרות הקורס:</u>
0. ללמוד מהו ההבדל בין שיטות נומריות לשיטות אנליטיות.
1. ללמוד עקרונות של שיטות נומריות.
2. להכיר היטב מספר שיטות <u>תשתיתיות</u>.
3. להכיר טרמינולוגיה וליצור "שפה משותפת" עם עובדים מתחומים שונים.

<u>המצב בשטח:</u>
<u>הצרכים:</u>
1. יש בעיות שאין להן" פתרון אנליטי". למשל, למשוואה $x = e^{-x}$ אין פתרון אנליטי. גם לא ניתן לחשב באופן אנליטי את האינטגרל $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.
2. לפעמים יש פתרון אנליטי, אבל הוא מסובך מדי למימוש.
3. לפעמים יש פתרון אנליטי, אבל סיבוכיות החישוב גדולה מדי. למשל כלל קרמר לפתרון משוואות, הסיבוכיות שלו היא $O(n!)$. נניח שמהירות החישוב של המחשב היא $r = 200Mfloat/sec$ (200 מליון פעולות לשניה). עבור $n = 50$ נקבל $\frac{50!}{200\times10^6} = \frac{3\times10^{64}}{200\times10^6} = \frac{3}{200}\times10^{58} sec$.
זה יוצא בערך 5×10^{48} שנים.
באמצעות שיטות נומריות, ניתן לפתור את המשוואה בסיבוכיות $O(n^3)$.
4. לפעמים יש לעבד "אנליטית" תוצאות מדידה. לדוגמה - טיל טס ורוצים למדוד כל זמן מסוים מהו הגובה של הטיל. מקבלים טבלה עם אלפי נתונים - לכל נקודת זמן, מהו גובה הטיל.
כעת רוצים לחשב את התאוצה של הטיל: $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$. איך אפשר לגזור כאשר אין לנו פונקציה רציפה של גובה הטיל אלא רק סדרת ערכים? ניתן לחשב זאת באמצעות אנליזה נומרית.
5. זמינות המחשבים. השיטות האנליטיות הרבה פעמים לא מתאימות למחשבים, בניגוד לשיטות של אנליזה נומרית, ש"תפורות" על מחשבים ספרתיים.

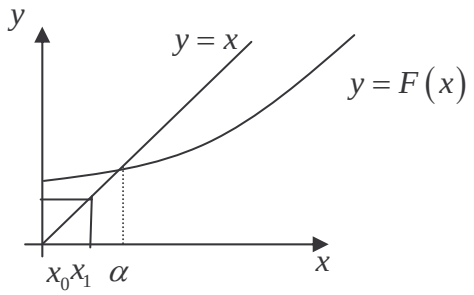
<u>ההיצע:</u>

<u>מושגים ורעיונות בסיסיים:</u>
<u>איטרציה:</u> $f(x) = 0$, הפתרון הוא α.
דרך איטרטיבית:
צעד $n = 0$: מנחשים x_1, אשר הוא קירוב של α.
כעת מפעילים $x_{n+1} = g(x_n)$. בודקים האם הפתרון החדש x_{n+1} הוא מספיק טוב. אם כן, סיימנו. אחרת מחשבים שוב - x_{n+2} וכן הלאה.

דוגמה: $x = e^{-x}$, $f(x) = x - e^{-x}$.

$x = F(x)$. $x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1), \ldots$.

מקווים: $\lim_{n\to\infty}|x_n - \alpha| = 0$, כלומר שיש התכנסות אל הפתרון הנכון.



ההתכנסות או אי ההתכנסות תלויה בשיפוע של $y = F(x)$ בנקודת השורש. אם הוא גדול מ- 1 אז לא תהיה התכנסות.

נניח ש $F(x) \in C^\infty$ (כלומר, הפונקציה $F(x)$ גזירה אינסוף פעמים).

ניתוח התכנסות:

משוואה 1: $x_n = F(x_{n-1}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

משוואה 2: $\alpha = F(\alpha)$

נחסיר בין המשוואות ונקבל: $x_n - \alpha = F(x_{n-1}) - F(\alpha)$. נשתמש במשפט ערך הביניים מחדו"א

ונקבל: $x_n - \alpha = F(x_{n-1}) - F(\alpha) = F'(\xi)(x_{n-1} - \alpha)$ עבור $\xi \in (x_{n-1}, \alpha)$.

$$x_1 - \alpha = F'(\xi_1)(x_0 - \alpha)$$

$$x_2 - \alpha = F'(\xi_2)(x_1 - \alpha) = F'(\xi_2)F'(\xi_1)(x_0 - \alpha)$$

$$x_n - \alpha = F'(\xi_n)F'(\xi_{n-1})\cdot\ldots\cdot F'(\xi_1)(x_0 - \alpha) .$$

אם נבטיח ש $|F'(\xi_n)| < 1$ לכל n, אז נקבל $\lim_{n\to\infty} x_n - \alpha = 0$.

תרגיל לבית לדוגמה, עבור $x = e^{-x}$ ו $x_0 = 0.5$.

<u>לינאריזציה</u>

משיק. $f(x) = 0$ (השורש הוא α)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ עבור $n = 0, 1, 2, \ldots$ כאשר x_0 הוא ניחוש.

שיטה זו נקראת שיטת ניוטון רפסון.

חישוב אינטגרל:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

מחלקים את התחום ל n חלקים. בכל נקודת הפרדה בין שני חלקים מחשבים את $f(x_i)$.

מחברים בקו בין כל שני $f\left(x_{i-1}\right), f\left(x_i\right)$. מקבלים סדרה של טרפזים. סוכמים את השטחים של כל הטרפזים. השטח של הטרפז ה i ניתן לחישוב באמצעות $h=\frac{b-a}{n}$ (גובה הטרפז) ואורכי הבסיסים שלו: $f\left(x_{i-1}\right), f\left(x_i\right)$.

נסמן $f_i = f\left(x_i\right)$. כלומר $i=1,2,3,\ldots,n$ $\quad A_i=\frac{1}{2}h\left(f_{i-1}+f_i\right)$.

סה"כ: $I \approx T\left(h\right)=\sum_{i=1}^{n} A_i = h\left[\frac{1}{2}f_0+f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+\frac{1}{2}f_n\right]$

מהי השגיאה? $E=I-T\left(h\right)=k\cdot h^2$ עבור k קבוע.

לדוגמה: $I=\int_1^2\left(\ln\left(t\right)\right)^{3.5}dt$

$T\left(h=0.1\right)=0.07628$ - שטח טרפז בעל גובה 0.1 - חלוקה ל 10 טרפזים.

$T\left(h=0.05\right)=0.07586$ - שטח טרפז בעל גובה 0.05 - חלוקה ל 20 טרפזים.

השגיאה היא $E\approx 0.3\%$.

<u>הגדרות:</u>

1. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בתחום $X=[a,b]$.
נאמר שיש ל f גבול L ב $x_0 \in X$ הנרשם: $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש
$|f(x)-L|<\varepsilon$ אם $|x-x_0|<\delta$.

$$|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a$$
$$|x-x_0|\le\delta \Leftrightarrow -\delta\le x-x_0\le\delta$$
$$x_0-\delta\le x\le x_0+\delta$$

2. תהי $\{a_n\}$ סדרה. יש לה גבול L שיסומן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N_0>0$ (שלם) כך ש
$|a_n-L|<\varepsilon$ לכל $n>N_0$.

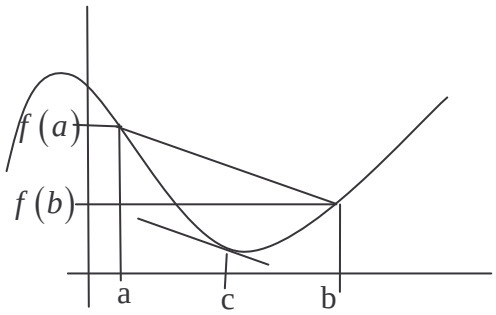
3. פונקציה $f(x)$ המוגדרת על $[a,b]$ היא רציפה $(continous)$ ב $x_0\in(a,b)$ אם
$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
$f(x)$ היא רציפה ב $[a,b]$ אם היא רציפה בכל נקודה בתחום $[a,b]$.

4. פונקציה $f(x)$ היא דיפרנציאבילית (גזירה) בנקודה $x_0\in(a,b)$ אם הגבול
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k$ קיים. במקרה כזה נאמר ש: $f'(x_0)=k$.

<u>משפטים:</u>

<u>משפט 1: משפט רול (Rolle):</u>
תהי $f(x)\in C[a,b]$ וגם $f'(x)\in(a,b)$ (זאת אומרת $f(x)\in C^1(a,b)$).
אם $f(a)=f(b)=0$ אז קיים $c\in(a,b)$ כך ש $f'(c)=0$.

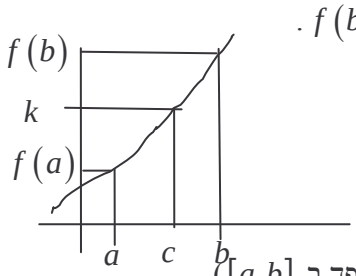
<u>משפט 2: משפט ערך הביניים לחלוקה:</u>
אם $f(x)\in C[a,b]$ וגם $f'(x)\in(a,b)$ אז $\frac{f(a)-f(b)}{b-a}=f'(c)$ (שיפוע) עבור $c\in(a,b)$
כלשהו.



<u>משפט 3: משפט ערך הביניים:</u>

תהי $f(x)\in C[a,b]$. יהי k מספר בין $f(a)$ ו $f(b)$.

אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)=k$.



<u>משפט 4: משפט ערך הביניים לאינטגרלים:</u>

תהי $f(x)\in C[a,b]$ ו $g(x)\ge 0$ (לא בהכרח רציפה ב $[a,b]$)

אז $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$ עבור $c\in[a,b]$ כלשהו.

($f(c)$ קיים כי $f(x)$ רציפה בין a ל b.)

<u>משפט 5: טור טיילור:</u>

תהי $f(x)\in C^n[a,b]$ ו $f(x)\in C^{n+1}(a,b)$.

אז עבור $x_0\in(a,b)$ מתקיים $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(c(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ עבור

$c(x)\in int(x_0,x)$.

(כאשר $int(a_1,...,a_k)=(\min\{a_1,...,a_k\},\max\{a_1,...,a_k\})$. זאת אומרת שהאינטרוול של קבוצת מספרים הוא התחום הלא סגור שבין המספר הקטן ביותר והמספר הגדול ביותר שבקבוצה.)

<u>תרגיל:</u>

הוכח שאם $f(x)\in C[a,b]$ וגם $f(x)\in C^n(a,b)$ וגם $f(x_0)=f(x_1)=...f(x_n)=0$ עבור $a\le x_0<x_1<...<x_n\le b$ אז מתקיים ש $f^{(n)}(c)=0$ עבור $c\in(x_0,x_n)$.

<u>שגיאות בחישוב:</u>

<u>אריתמטיקת נקודה צפה:</u>

מספר נקודה צפה בעל n ספרות בבסיס β הוא מהצורה: $x=\pm(.d_1d_2...d_n)_\beta\times\beta^e$ כך ש

$0\le d_i\le\beta-1$ ו e הוא מספר שלם ונקרא אקספוננט (exponent).

$m<e<M$, $(m=-M)$. (m הוא מספר ביטים כלשהו)

נאמר ש x הוא מנורמל אם $d_1\ne 0$ או $d_1=d_2=...=d_n=0$.

הייצוג במחשב של מספר נקודה צפה:

$\pm$	$d_1,d_2,.....d_n$						$\pm$	e	

שתי דרכים לתרגם מספר נתון למספר נקודה צפה ב $n\beta-digit$:

$Rounding$, $Truncation$ ($chopping$)

$x-real$, $fl(x)-floating$.

$Rounding$: $fl(x)$ הוא מספר נקודה צפה $n\beta-digit$ הקרוב ביותר ל x (עיגול כלפי מעלה).

אם $x=\pm\left(.d_1d_2d_3...\right)_\beta\times\beta^e$ אז

$$fl\left(x\right)=\begin{cases}\pm\left(.d_1,...,d_n\right)_\beta\times\beta^e-if_d_{n+1}.d_{n+2}d_{n+3}...<\frac{1}{2}\beta\\ \pm\left[\left(.d_1,...,d_n\right)_\beta+\beta^{-n}\right]\times\beta^e-if_d_{n+1}.d_{n+2}d_{n+3}...\geq\frac{1}{2}\beta\end{cases}$$

$Truncation$: אם $x=\pm\left(.d_1d_2d_3...\right)_\beta\times\beta^e$ אז $fl\left(x\right)=\pm\left(.d_1,...,d_n\right)_\beta\times\beta^e$.

דוגמה: $fl\left(\frac{2}{3}\right)=?$ עבור $\beta=10,n=2$. $\frac{2}{3}=0.666...=+\left(.666...\right)\times10^0$.

$$fl\left(\frac{2}{3}\right)=\begin{cases}+\left(0.66\right)_{10}\times10^0-Truncation\\ +\left(0.67\right)_{10}\times10^0-Rounding\end{cases}$$

דוגמה: $fl\left(-838\right)=?$ עבור $\beta=10,n=2$. $-838=-\left(.838\right)\times10^3$

$$fl\left(-838\right)=\begin{cases}-\left(0.83\right)_{10}\times10^3-Truncation\\ -\left(0.84\right)_{10}\times10^3-Rounding\end{cases}$$

Round of error $=fl\left(x\right)-x$. (גודל השגיאה)

Relative round of error $=\frac{fl\left(x\right)-x}{x}\equiv\delta$, $\left(x\neq0\right)$, $fl\left(x\right)=x+\left(1+\delta\right)\Leftarrow\left[\delta\equiv\delta\left(x\right)\right]$.

(גודל השגיאה יחסית לגודל המספר)

עבור $Rounding$: $\left|\delta\right|<\frac{1}{2}\beta^{1-n}\equiv u\left(rounding_unit\right)$.

עבור $Truncation$: $-\beta^{1-n}\leq\delta\leq0\Leftarrow\left|\delta\right|\leq\beta^{1-n}\equiv u\left(rounding_unit\right)$.

הוכחה (עבור $Truncation$): $fl\left(x\right)=\pm\left(.d_1d_2...d_n\right)_\beta\times\beta^e$, $x=\pm\left(.d_1d_2...\right)_\beta\times\beta^e$

$$\delta=\frac{fl\left(x\right)-x}{x}=\frac{\pm\left(.d_1d_2...d_n\right)_\beta\times\beta^e-\left(\pm\right)\left(.d_1d_2...\right)_\beta\times\beta^e}{\pm\left(.d_1d_2...\right)_\beta\times\beta^e}$$

$$=\frac{\left(.d_1d_2...d_n\right)_\beta\times\beta^e-\left(.d_1d_2...\right)_\beta\times\beta^e}{\left(.d_1d_2...\right)_\beta\times\beta^e}=-\frac{\left(.\overbrace{00...0}^{n-times}d_{n+1}d_{n+2}...\right)_\beta\times\beta^e}{\left(.d_1d_2...\right)_\beta\times\beta^e}$$

$$=-\frac{\left(d_{n+1}.d_{n+2}...\right)_\beta\times\beta^{-n-1}}{\left(d_1.d_2...\right)_\beta\times\beta^{-1}}=-\frac{\left(d_{n+1}.d_{n+2}...\right)_\beta}{\left(d_1.d_2...\right)_\beta}\times\beta^{-n}$$

$\left(d_{n+1}.d_{n+2}...\right)_\beta\leq\beta$ (מונה), $\left(d_1.d_2...\right)_\beta\geq1$ (מכנה)

לכן: $\left|\delta\right|\leq\frac{\beta}{1}\beta^{-n}=\beta^{1-n}$ וזה מה שרצינו להוכיח.

<u>פעולות אריתמטיות בנקודה צפה (Floating-Point Arithmetic):</u>

הפעולות הן +, -, ×, ÷. נסמן אותן ב (ω).

$fl(x\omega y)=(x\omega y)(1+\delta)$ עבור $|\delta|\le u$.

מתקיים ש: $x+y+z=(x+y)+z=x=(y+z)$ (אסוציאטיביות), אולם זה לא מתקיים תמיד בפעולות אריתמטיות בנקודה צפה.

$$x=(.20)10^1=2\ ,\ y=(0.77)10^{-6}\ ,\ z=(0.30)10^1=3\ .$$

$$x+y=(0.20000077)\times 10^1\ ,\ x\cdot y=(0.154)\times 10^{-5}$$

$$\frac{x}{z}=(0.66...)10^0$$

$$fl(x+y)=(0.20)10^1\ ,\ fl(x\cdot y)=(0.15)10^{-5}$$

$$fl\left(\frac{x}{z}\right)=\left(0.6\overset{7}{\overset{\frown}{6}}\right)10^0$$

<u>דוגמה</u>: לחשב את $f(x)=x^{2^n}$ בפעולות אריתמטיות בנקודה צפה.

$$x^{2^n}=x^{\overbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}^{n-times}}=\left(\ldots\left(\left(x^2\right)^2\right)^2\ldots\right)^2\ .$$

$$x=x_0$$

$$x_1=x_0^{\,2}\qquad \hat{x}_1=fl\left(x_0^{\,2}\right)=x_0^{\,2}(1+\delta_1)$$

$$x_2=x_1^{\,2}\qquad \hat{x}_2=fl\left(x_1^{\,2}\right)=x_1^{\,2}(1+\delta_2)$$

$$x_3=x_2^{\,2}\qquad \vdots$$

$$\vdots$$

$$x_n=x_{n-1}^{\,2}\qquad \hat{x}_n=fl\left(x_{n-1}^{\,2}\right)$$

$$x_n=f(x_0)$$

$$\hat{x}_2=\left[x_0^{\,2}(1+\delta_1)\right]^2(1+\delta_2)=x_0^{\,2^2}(1+\delta_1)^2(1+\delta_2)$$

$$\hat{x}_3=\left[x_1^{\,2}(1+\delta_2)\right]^2(1+\delta_3)=\left[x_0^{\,2^2}(1+\delta_1)^2(1+\delta_2)\right]^2(1+\delta_3)$$

$$=x_0^{\,2^3}(1+\delta_1)^{2^2}(1+\delta_2)^{2^1}(1+\delta_1)^{2^0}$$

$$\hat{x}_n=x_0^{\,2^n}(1+\delta_1)^{2^{n-1}}(1+\delta_2)$$