שדה משמר ופוטנציאל בשלושה מימדים.

## שדה משמר ופוטנציאל (בשלושה מימדים)

### תרגיל 1

להוכיח שהשדה $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}$ הוא שדה משמר ב $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ ולמצוא פוטנציאל.

פתרון

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \Rightarrow \vec{F}(x,y,z)=\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{x^2+y^2+z^2}$$

מכיוון ש $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ הוא תחום פשוט קשר והשדה $\vec{F}$ הוא רציף $C^1$ ב- $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$

אז מספיק להראות ש $\vec{\nabla}\times\vec{F}(x,y,z)=\underline{0}\quad \forall (x,y,z)\neq\underline{0}$

לפי "כלל לייבניץ" $\left(\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{G})=\vec{\nabla}\varphi\times\vec{G}+\varphi\cdot\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$ נקבל:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\cdot(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\right]=$$

$$=\frac{-2(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})}{(x^2+y^2+z^2)^2}\times(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})+\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \text{גזירה לפי } x & \text{גזירה לפי } y & \text{גזירה לפי } z\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$$

בגלל הרציפות שהשדה הנתון הוא אכן שדה משמר ב $\mathbb{R}^3\setminus\{\underline{0}\}$

תהא $u(x,y,z)$ פונקציית פוטנציאל, אז: $\vec{\nabla}u(x,y,z)=\vec{F}(x,y,z) \Rightarrow$

$$(1)\quad u'_x=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\qquad (2)\quad u'_y=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\qquad (3)\quad u'_z=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

נבדוק ל(1) אינטגרציה לפי $x$ ונקבל:

$$u=\int\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)+C(y,z)$$

את נגזרת זאת ב (2) וב-(3) נקבל:

$$(2)\Rightarrow C'_y(y,z)=0$$
$$(3)\Rightarrow C'_z(y,z)=0$$

ומשם אלה נובע $C(y,z)\equiv C$

ולכן פונקציית פוטנציאל הוא מהצורה: $u(x,y,z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)+C$

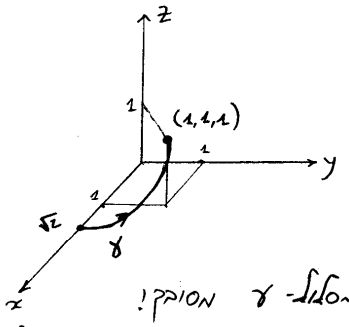
### תרגיל 2

$$\vec{F}=\frac{yz\hat{i}+xz\hat{j}+xy\hat{k}}{1+x^2y^2z^2}$$

לחשב את העבודה של השדה הוקטורי

לאורך קו הגרף: $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\\ z=\frac{4}{\pi}t\end{cases}\quad 0\le t\le\frac{\pi}{4}$

שדה משמר ופוטנציאל בשלושה מימדים.




**פתרון** דרוש לחשב אינטגרל קוי מסוג 2:

$$W=\int_\gamma \vec F\circ d\vec r=\int_\gamma \frac{yz}{1+x^2y^2z^2}dx+\frac{xz}{1+x^2y^2z^2}dy+\frac{xy}{1+x^2y^2z^2}dz$$

חישוב ישיר בעזרת הפרמטריזציה הידועה של המסלול- γ מסובך!
אם נראה שהשדה הוא שדה משמר נוכל לחשב את האינטגרל ביתר קלות
ע"י שינוי מסלול אינטגרציה (או ע"י מציאת פונק' פוטנציאל)

**בדיקה שהשדה משמר:**

$$\vec\nabla\times\left(\frac{1}{1+x^2y^2z^2}(yz,xz,xy)\right)=\operatorname{grad}\left(\frac{1}{1+x^2y^2z^2}\right)\times(yz,xz,xy)+$$
$$+\frac{1}{1+x^2y^2z^2}\cdot\vec\nabla\times(yz,xz,xy)$$

מתקיים:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{1+x^2y^2z^2}\right)=\frac{-1}{(1+x^2y^2z^2)^2}(2xy^2z^2,2yx^2z^2,2zx^2y^2)=\frac{-2xyz}{(1+x^2y^2z^2)^2}(yz,xz,xy)$$

ולכן הראינו הנ"ל שמן $=\underline{0}$

$$\vec\nabla\times(yz,xz,xy)=\begin{vmatrix}\hat i&\hat j&\hat k\\ \text{גזרה}&\text{גזרה}&\text{גזרה}\\ yz&xz&xy\end{vmatrix}=\hat i(x-x)-\hat j(y-y)+\hat k(z-z)=\underline{0}$$

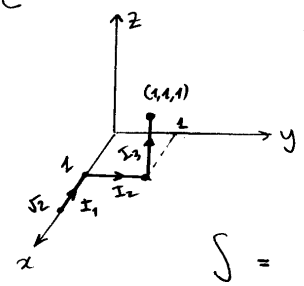
כמו כן

ולכן $\vec\nabla\times\vec F=\underline{0}$ (בכל $\mathbb{R}^3$) $\Leftarrow$ **השדה משמר.**

נחשב את האינטגרל:

$$\int_C \frac{yz}{1+x^2y^2z^2}dx+\frac{xz}{1+x^2y^2z^2}dy+\frac{xy}{1+x^2y^2z^2}dz$$

לאורך המסלול הבא מ $(\sqrt2,0,0)$ ל- $(1,1,1)$:




**פרמטריזציה של $I_1$:**

$$\int_{I_1}=\int_{\sqrt2}^{1}0\,dt=0 \Leftarrow \begin{cases}dx=dt\\dy=dz=0\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}\quad t:\sqrt2\to1$$

**פרמטריזציה של $I_2$**

$$\int_{I_2}=\int_0^1 0\,dt=0 \Leftarrow \begin{cases}dx=0\\dy=dt\\dz=0\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}x=1\\y=t\\z=0\end{cases}\quad 0\le t\le1$$

שדה משמר ופוטנציאל בשלושה מימדים.

## פרמטריזציה של $I_3$

$$\int_{I_3} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \mathrm{Arctan}(t)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} dx = dy = 0 \\ dz = dt \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

בסה"כ $W = \frac{\pi}{4}$

## תרגיל 3

תהי $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה רציפה

ויהיו $P, Q, R$ שלוש נקודות במרחב ונסמן:

$$I_1 = \int_{P\to Q} x f(x^2+y^2)\,dx + y f(x^2+y^2)\,dy$$

$$I_2 = \int_{P\to R} x f(x^2+y^2)\,dx + y f(x^2+y^2)\,dy$$

$$I_3 = \int_{R\to Q} x f(x^2+y^2)\,dx + y f(x^2+y^2)\,dy$$

(מסלולי האינטגרציה הם הקטעים הישרים המחברים בין הנקודות)

להוכיח ש: $I_3 = I_1 - I_2$

### פתרון

נתבונן בשדה

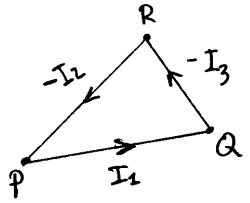
$$\bar{F}(x,y,z) = x f(x^2+y^2)\,\hat{i} + y f(x^2+y^2)\,\hat{j} + 0\,\hat{k}$$

הינו שדה משמר ב $\mathbb{R}^3$

כי הפונקציה $u(x,y,z) = \frac{1}{2} f(x^2+y^2)$ הינו פונקציה פוטנציאלית שלו

$$\vec{\nabla} u(x,y,z) = \bar{F}(x,y,z)$$

ולכן שרבוע אינטגרלי. הקווי מסוים ב של $\bar{F}(x,y,z)$ על המשולש $\Delta PQR$ (=מסלול סגור) מתאפס:




$$0 = \int_{P\to Q} + \int_{Q\to R} + \int_{R\to P} = I_1 - I_3 - I_2$$

$$\Leftarrow \quad I_3 = I_1 - I_2$$

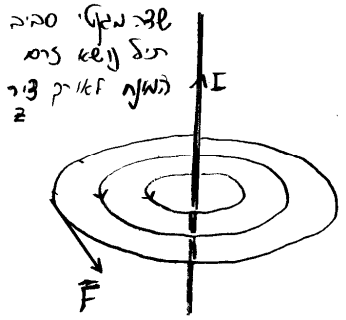
שדה משמר ופוטנציאל בשלושה מימדים.

## תרגיל 4

(א) לתת דוגמא לשדה וקטורי $\bar{F}(x,y,z)$ ולתחום $D\subseteq\mathbb{R}^3$
כך שבתחום $D$ מתקיים $\bar{\nabla}\times\bar{F}=\bar{0}$ , ולמרות זאת $\bar{F}$ אינו משמר ב-$D$
(*) האם כדאי לנו יהיה משמר גם בכל תחום $\tilde{D}\subseteq D$ ?

ב) לתת דוגמא לשדה $\bar{F}(x,y,z)$ שתחום הגדרתו אינו תחום פשוט קשר
ובכל זאת $\bar{F}$ משמר בתחום הגדרתו ($\bar{F}$ ממחלקה $C^1$ בתחום הגדרתו)
(*) האם הוא יקיים $\nabla\times\bar{F}=\bar{0}$ בתחום ההגדרה?

## בתרגיל




(א)
$$\bar{F}(x,y,z)=\frac{-y}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}+0\hat{k}$$

$$\nabla\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=0\hat{i}-0\hat{j}+\hat{k}\left[\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y\right]=$$

$$=\hat{k}\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]=\bar{0}$$

אך נמצא בתחום ההגדרה שרוא: $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z)\}=\mathbb{R}^3\setminus\{\text{ציר } z\}$

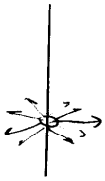
תחום ההגדרה אינו פשוט קשר , כדי להראות שהשדה אינו משמר בתחום זה
נחשב אינטגרל קווי על המעגל $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$

$x=\cos t$
$y=\sin t$
$z=0$

$$\oint_C \bar{F}\circ d\bar{r}=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t}{1}(-\sin t)\,dt+\frac{\cos t}{1}\cos t\,dt=2\pi\neq 0$$

השדה אינו משמר בתחום $D=\mathbb{R}^3\setminus\{\text{ציר } z\}$

(*) אם $\tilde{D}\subset D$ הוא תחום פשוט קשר אז $\bar{F}$ משמר ב-$\tilde{D}$ (כי $\bar{\nabla}\times\bar{F}=\bar{0}$)



(ג)
$$\bar{F}(x,y,z)=\frac{x}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\hat{j}+0\hat{k}$$

מוגדר ב $\mathbb{R}^3\setminus\{\text{ציר } z\}$ = תחום שאינו פשוט קשר
יש לו שם פוטנציאל פוטנציאלי: $u(x,y,z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$
ולכן הוא משמר בתחום הגדרתו.

(*) ולא נקודה בתחום הגדרה יש סביבה כדורית שבה השדה משמר $\Leftarrow$ $\bar{\nabla}\times\bar{F}=\bar{0}$

שדה משמר ופוטנציאל בשלושה מימדים.

**תרגיל 5**

נתון שדה וקטורי: $\vec{F}=f(r)\vec{r}$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

כאשר $f(t)$ רציפה בקטע $[0,\infty)$

להוכיח שלכל שתי נקודות $A,B$ במרחב ולכל עקום $\gamma$ שמתחבר איתן מתקיים

$$\int_\gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=\int_{r_1}^{r_2} t f(t)\,dt \quad , \quad r_1=|OA| \quad r_2=|OB|$$

**פתרון**

ראשית נוודא שמדובר בשדה משמר

$$\vec{\nabla}\times\left(f(r)\vec{r}\right)=\vec{\nabla}f(r)\times\vec{r}+f(r)\cdot\vec{\nabla}\times\vec{r}$$

משמאל הרמה של הפונקציה $f(r)=f(x,y,z)$ הם ספרות שמרכזן בראשית

ולכן $\vec{\nabla}f(r)$ שנובע למשטחי הרמה הללו מקבילים ל $\vec{r}$ $\Leftarrow$ $\vec{\nabla}f(r)\times\vec{r}=\underline{0}$

כמו כן

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \text{אפס} & \text{אפס} & \text{אפס}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\underline{0}$$

ונובע ש $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\underline{0}$ ולכן השדה משמר.

**נמצא פונק' פוטנציאל**

**דרך 1** מכיוון שמדובר בשדה רדיאלי שעוצמתו היא: $|\vec{F}|=f(r)\cdot|\vec{r}|=r\,f(r)$

אז העבודה שהיא יבצע לסחיפת מסלול רדיאלי מראשית O לנק' A

היא בדיוק: $u(A)=W=\int_0^{|OA|} r\,f(r)\,dr$

ומכאן ש

$$\int_{A\to B}\vec{F}\circ d\vec{r}=u(B)-u(A)=\int_{|OA|}^{|OB|} r\,f(r)\,dr$$

**בתור פירוט:** פרמטריזציה של מסלול רדיאלי מראשית לנק' $A=(a_1,a_2,a_3)$ היא

$$\begin{cases}x(t)=a_1t\\ y(t)=a_2t\\ z(t)=a_3t\end{cases} \quad 0\le t\le 1 \quad \Leftarrow \quad \begin{matrix}dx=a_1dt\\ dy=a_2dt\\ dz=a_3dt\end{matrix}$$

ובנוסף: $r(t)=|\vec{r}(t)|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,t$

לכן:

$$u(A)=\int_{O\to A}\vec{F}\circ d\vec{r}=\int_0^1 f\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,t\right)\cdot\underbrace{(a_1t,a_2t,a_3t)}_{\vec{r}(t)}\circ\underbrace{(a_1dt,a_2dt,a_3dt)}_{(dx,dy,dz)}$$

$$=\int_0^1 f\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,t\right)\cdot(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\,t\,dt$$

אם נציב באינטגרל האחרון $u=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,t \Rightarrow du=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,dt$

נקבל:

$$u(A)=\int_0^{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} f(u)\cdot u\,du = \int_0^{|OA|} f(u)\cdot u\,du$$

<u>דרך 2</u>

נתפש את פונקציית הפוטנציאל בצורה: $u(x,y,z)=u(r)$

$$\nabla \vec{u} = \left(u'(r)\cdot r'_x,\ u'(r)\cdot r'_y,\ u'(r)\cdot r'_z\right)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow r'_x=\frac{x}{\sqrt{\ }}=\frac{x}{r},\quad r'_y=\frac{y}{r},\quad r'_z=\frac{z}{r}$$

כלומר:

$$\vec{\nabla} u = \left(u'(r)\cdot\frac{x}{r},\ u'(r)\cdot\frac{y}{r},\ u'(r)\cdot\frac{z}{r}\right)$$

לדרוש:

$$\vec{\nabla} u = \vec{F} = f(r)\cdot\vec{r} = f(r)\cdot(x,y,z)$$

ונקבל:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & u'(r)\cdot\frac{x}{r} = f(r)\cdot x \\ (2) & u'(r)\cdot\frac{y}{r} = f(r)\cdot y \\ (3) & u'(r)\cdot\frac{z}{r} = f(r)\cdot z \end{array}\right\} \Rightarrow u'(r)=r f(r)$$

ולכן

$$u(r)=\int_0^r r f(r)\,dr$$

וכאמור קיבלנו נוגע ש:

$$\int_L \vec{F}\circ d\vec{r} = u(B)-u(A) = \int_{|OA|}^{|OB|} r f(r)\,dr$$