אופרטורים דיפרנציאלים, משפט גאוס ומשפט סטוקס.

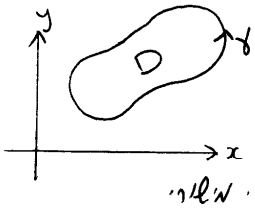
אופרטורים דיפרנציאלים

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

דיברגנץ

עבור $\vec{F}(x,y,z) = \hat{i} f_1(x,y,z) + \hat{j} f_2(x,y,z) + \hat{k} f_3(x,y,z)$ מתמלקה C^1

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\circ\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z} f_3(x,y,z)$$



תרגיל 1 (הגדרה אלטרנטיבית לנוסחת גרין)

יהי D תחום מישורי עם שפה γ

ויהי: $\vec{F}(x,y) = f_1(x,y)\hat{i} + f_2(x,y)\hat{j} \in C^1(\bar{D})$ שדה וקטורי מישורי

להראות ש: $\iint_D \vec{\nabla}\circ\vec{F}(x,y)\,dxdy = \oint_\gamma f_1(x,y)\,dy - f_2(x,y)\,dx$

פתרון

יהי $P(x,y) = -f_2(x,y) \qquad Q(x,y) = f_1(x,y)$

לפי משפט גרין: $\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy$

$$\Leftrightarrow \oint_\gamma -f_2(x,y)\,dx + f_1(x,y)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2\right] dxdy =$$

$$= \iint_D \vec{\nabla}\circ\vec{F}(x,y)\,dxdy$$ מ.ש.ל.

תרגיל 2

יהיו $\vec{F}(x,y,z)$ ו- $\vec{G}(x,y,z)$ שדות וקטוריים ו- $\varphi(x,y,z)$ פונקציה סקלרית

להוכיח:

(א) $\vec{\nabla}\circ(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\circ\vec{F} + \vec{\nabla}\circ\vec{G}$

(ב) $\vec{\nabla}\circ(\varphi\vec{F}) = \vec{\nabla}\varphi\circ\vec{F} + \varphi\cdot\vec{\nabla}\circ\vec{F}$

בפרט, אם $\varphi \equiv c$ אז $\operatorname{div}(c\vec{F}) = c\operatorname{div}\vec{F}$

פתרון נכיח את ב':

נגזר מעלה שמאל:

$$\vec{\nabla}\circ(\varphi\circ\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi f_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi f_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi f_3) =$$

$$= \varphi'_x\cdot f_1 + \varphi\cdot f'_{1x} + \varphi'_y f_2 + \varphi\cdot f'_{2y} + \varphi'_z f_3 + \varphi f'_{3z} = (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z)\circ\vec{F} + \varphi\cdot(f'_{1x} + f'_{2y} + f'_{3z})$$

$$= \vec{\nabla}\varphi \circ \vec{F} + \varphi(\vec{\nabla}\circ\vec{F}) \quad \blacksquare$$

לפלסיאן

$$\Delta = \nabla^2 = \vec{\nabla}\circ\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

אם $f(x,y,z)$ היא פונקציה מתמלקה C^2 אזי:

$$\nabla^2 f(x,y,z) = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz}$$

מתקיים: $\nabla^2 f = \vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla} f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$

פונקציה הרמונית

$f(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ היא הרמונית בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^3$ אם $\nabla^2 f = 0$

תרגיל 3 להוכיח ש: $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$ היא הרמונית ב $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

פתרון

$$f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$f'''_{xx} = -(x^2+y^2+z^2)^{3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

באופן דומה

$$f'''_{yy} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \quad f'''_{zz} = \frac{2z^2-y^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Leftarrow \quad f'''_{xx} + f'''_{yy} + f'''_{zz} = 0$$

רוטור

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

תכונות

(א) $\vec{\nabla}\times(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$

(ב) $\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{F}) = \vec{\nabla}\varphi\times\vec{F} + \varphi\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F}$

תרגיל 4

יהי $\varphi(x,y,z)$ פונקציה מתמלקה C^2 ו- $\vec{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי מתמלקה C^2.

להוכיח: (א) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = \underline{0}$ (ב) $\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = 0$

פתרון

(א)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = \vec{\nabla}\times(\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z) = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{pmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left[\varphi''_{zy} - \varphi''_{yz}\right] - \hat{j}\left[\varphi''_{zx} - \varphi''_{xz}\right] + \hat{k}\left[\varphi''_{yx} - \varphi''_{xy}\right] = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

ג)

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \hat{i}\left(f'_{3y} - f'_{2z}\right) - \hat{j}\left(f'_{3x} - f'_{1z}\right) + \hat{k}\left(f'_{2x} - f'_{1y}\right)$$

$$\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_{3y} - f'_{2z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_{1z} - f'_{3x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f'_{2x} - f'_{1y}\right)$$

$$= \cancel{f''_{3yx}} - \cancel{f''_{2zx}} + \cancel{f''_{1zy}} - \cancel{f''_{3xy}} + \cancel{f''_{2xz}} - \cancel{f''_{1yz}} = 0$$

<u>משפט גאוס</u> (משפט הדיברגנץ)

G תחום פשוט ב $\mathbb{R}^3$ ששפתו היא משטח S

$\vec{F}(x,y,z) \in C^1(\overline{G})$ שדה וקטורי חלק

$$\iiint_G \vec{\nabla}\circ\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{F}\circ\hat{n}\,d\mu$$

$\hat{n}$ - נורמל חיצוני למשטח S.

<u>תרגיל 5</u> לחשב אינטגרל משטחי מסוג 2: $\iint_S \vec{F}\circ\hat{n}\,d\mu$

כאשר $\vec{F} = 2x\hat{i} + 3y\hat{j} + z\hat{k}$! S היא המשטח: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 1\le z\le 3 \end{cases}$

<u>פתרון</u>

יהי G התחום שכולא הגליל $x^2+y^2=4$ בין $z=1$ ל $z=3$ אז:

$$\iiint_G \vec{\nabla}\circ\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{F}\circ\hat{n}\,d\mu + \iint_{S_1} \vec{F}\circ\hat{n}\,d\mu + \iint_{S_2} \vec{F}\circ\hat{n}\,d\mu$$

כאשר S_1 בסיס תחתון S_2 בסיס עליון.

$$\iiint_G \vec{\nabla}\circ\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_G 5\,dx\,dy\,dz = 5\cdot\underbrace{2\cdot\pi\cdot 4}_{\text{נפח הגליל}} = 40\pi$$

<u>על הבסיס התחתון</u> $x^2+y^2=4$, $z=1$ מתקיים $\hat{n}=-\hat{k}$ $\Leftarrow$ $\vec{F}\circ\hat{n}=-1$

$$\iint_{S_1} \vec{F}\circ\hat{n}\,d\mu = -\iint_{S_1} d\mu = \underbrace{-4\pi}_{\text{שטח}}$$

<u>על הבסיס העליון</u> $x^2+y^2\le 4$ $z=3$ מתקיים $\hat{n}=\hat{k}$ $\Leftarrow$ $\vec{F}\circ\hat{n}=3$

$$\iint_{S_2} \vec{F}\circ\hat{n}\,d\mu = 3\iint_{S_2} d\mu = 3(4\pi) = 12\pi$$

בסה"כ

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\mu = 40\pi - 12\pi + 4\pi = 32\pi$$

חישוב נפחים בעזרת משפט גאוס

יהי G תחום סגור ב $\mathbb{R}^3$ ששפתו היא המשטח S

ויהי $\vec{r}(x,y,z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

אז לפי משפט גאוס:

$$\iint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,d\mu = \iiint_G \vec{\nabla}\cdot\vec{r}\,dxdydz = 3\iiint_G dxdydz$$

$$\Rightarrow \text{נפח התחום } G = \frac{1}{3}\iint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,d\mu$$

תרגיל יהי B כדור ברדיוס R

להוכיח ש: $\left(\text{נפח הכדור}\right) = \frac{R}{3}\left(\text{שטח פנים של } B\right)$

פתרון

נניח שמרכז הכדור נמצא בראשית אז $\hat{n} = \frac{\vec{r}(x,y,z)}{R}$

$$\Rightarrow \left(\text{נפח הכדור}\right) = \frac{1}{3}\iint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,d\mu = \frac{1}{3}\iint_S \frac{|\vec{r}|^2}{R}\,d\mu = \frac{R}{3}\iint_S d\mu = \frac{R}{3}\cdot\left(\text{שטח פנים}\right)$$

הגדרת הדיברגנץ' בעזרת משפט גאוס

אם $\vec{F}(x,y,z)$ היא שדה וקטורי ממחלקה C^1 בתחום $D\subseteq\mathbb{R}^3$

אז בכל נקודה $(x_0,y_0,z_0)\in D$ מתקיים

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\mu$$

כאשר V היא נפח של כדור שמרכזו ב (x_0,y_0,z_0), S משטח פני הכדור, $\hat{n}$ נורמל חיצוני משטח.

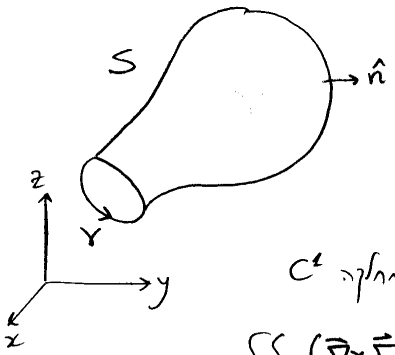
אם השדה $\vec{F}$ מתאר צימוח של נוזל אז כמות (נפח) הנוזל שחוצה את משטח פני הכדור בית מין היא $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\mu$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{V}\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\mu$ מתאר כמות נוזל (ממוצעת) שנוצרת מכל יח' נפח של הכדור ביחידת זמן

כאשר עוברים לגבול $V\to 0$ מקבלים $\operatorname{div}\vec{F}$ = קצב הצמיחה ממקור נקודתי

(*) שדה $\vec{F}$ שמקיים $\operatorname{div}\vec{F}=0$ נקרא שדה חסר מקורות.

משפט סטוקס



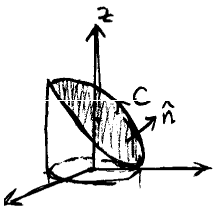
S משטח וקטורי ב $\mathbb{R}^3$, $\hat{n}$ נורמל יחידה

γ עקום שמאפיין את שפת המשטח S

(מכיוון חיובי ביחס לנורמל $\hat{n}$)

$\bar{F}(x,y,z) = P\cdot\hat{i} + Q\,\hat{j} + R\,\hat{k}$ מתחלקת C^1

אז:
$$\iint_S (\bar{\nabla}\times\bar{F})\circ\hat{n} = \oint P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$



דוגמא 7

יהי C עקום החיתוך בין המשטחים $x^2+y^2=1$! $x+y+z=1$

לחשב את האינטגרל הקווי מסוג 2:

$$\left|\int_C (-2y^3\hat{i}+2x^3\hat{j}-2z^3\hat{k})\circ d\bar{r}\right|$$

פתרון

החיתוך בין הגליל $x^2+y^2=1$ לבין המישור $x+y+z=1$ הוא אלפסה

נסמן ב-S את החלק של המישור $x+y+z=1$ שכלוא ע"י האלפסה C

לפי משפט סטוקס:
$$\oint_C \bar{F}\circ d\bar{r} = \iint_S (\bar{\nabla}\times\bar{F})\circ\hat{n}\,d\mu$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -2y^3 & 2x^3 & -2z^3 \end{vmatrix} = 2\hat{i}\left(-\frac{\partial z^3}{\partial y} - \overset{=0}{\frac{\partial x^3}{\partial z}}\right) - 2\hat{j}\left(-\frac{\partial z^3}{\partial x} + \overset{=0}{\frac{\partial y^3}{\partial z}}\right)$$

$$+ 2\hat{k}\left(\frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y}\right) = 6(x^2+y^2)\,\hat{k}$$

הנורמל של S הוא הנורמל של המישור $x+y+z=1$ כלומר:
$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$(\bar{\nabla}\times\bar{F})\circ\hat{n} = 2\sqrt{3}\,(x^2+y^2 \quad \Leftarrow$$

ונכניס לחשב (אינטגרל משטחי מסוג 1):
$$2\sqrt{3}\iint_S (x^2+y^2)\,d\mu$$

אפשר לתאר את S כגרף של פונקציה

$$z = 1-x-y$$
$$(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$$

$$d\mu = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = \sqrt{3} \quad \Leftarrow$$

ומכאן ש:

$$2\sqrt{3}\iint_S (x^2+y^2)\,d\mu = 2\sqrt{3}\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{3}\,dx\,dy = 6\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$

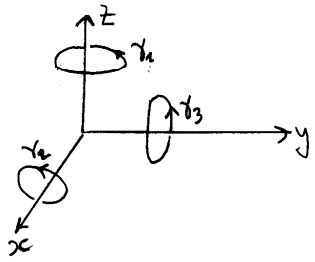
$$= 6\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{1} r^3\,dr = 12\pi\cdot\frac{1}{4} = 3\pi$$

תרגיל 8

נשקלה $\vec F(x,y,z)$ שדה בדיפרנציאבילי ב $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{P_1 \cup P_2 \cup P_3\}$

P_1, P_2, P_3 הם החצי המישור של ציר x, החצי המישור של ציר y והחצי המישור של ציר z

ומקיים בתחום D: $\vec\nabla\times\vec F = \underline{0}$

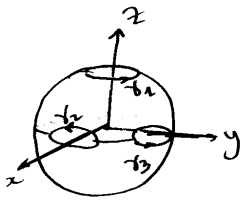


ידוע $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ המסלולים הבאים

נתון: $\oint_{\gamma_2} \vec F\cdot d\vec r = 3 \qquad \oint_{\gamma_1} \vec F\cdot d\vec r = 5$

לחשב: $\oint_{\gamma_3} \vec F\cdot d\vec r$

פתרון



יהי S המשטח הבא (קליפה כדורית עם שלושה חורים)

נשקלה $\vec F$ שדה בדיפרנציאבילי בסביבה של המשטח S

ומקיים ש $\vec\nabla\times\vec F = 0$ לכן אם γ היא שפת המשטח S

אז

$$0 = \iint_S \underbrace{(\vec\nabla\times\vec F)}_{\underline{0}}\cdot\hat n\,d\mu = \oint_\gamma \vec F\cdot d\vec r$$

נשפה γ של S מורכבת מ:

γ_2 בכיוון שלילי, γ_1 בכיוון שלילי γ_3 בכיוון שלילי $\Leftarrow$

$$\oint_{\gamma_3}\vec F\cdot d\vec r = -\oint_{\gamma_2}\vec F\cdot d\vec r - \oint_{\gamma_1}\vec F\cdot d\vec r = -3-5 = -8$$