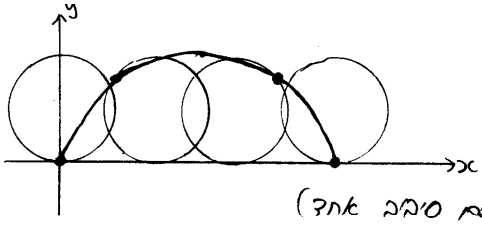
אינטגרלים קויים מסוג ראשון ומסוג שני.
משפט גרין.



תרגיל 1

לחשב את אורכה של ציקלואידה (המסלול שעובר נקודה על שפת של גלגל ברדיוס a כאשר הוא מתגלגל ומשלים סיבוב אחד)

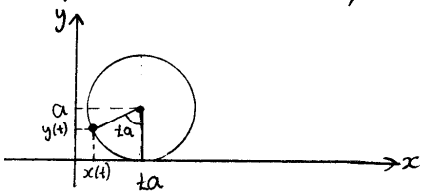
פתרון

פרמטריזציה של הציקלואידה:

$$\begin{cases} x(t) = ta - a\sin t \\ y(t) = a - a\cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

הסבר:

לאחר שהגלגל הסתובב t רדיאנים מימין, מרכז הדיסקה ta יתיר אורך ימינה (כי אורך הקשת המתאימה $= ta$)



המסלול:

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

גזירה ברדיוס ולכן אורכה הוא:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\tfrac{t}{2}}\, dt \underset{\uparrow}{=} 2a\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{t}{2}\, dt$$

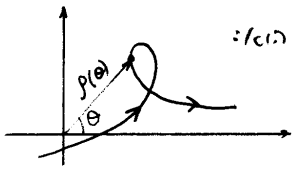
לגבי $0 \le t \le 2\pi$
מתקיים $\sin\frac{t}{2} \ge 0$

$$= -8a\cos\tfrac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

תרגיל 2

להראות שאם עקום מישורי נתון בצורה קוטבית: $\rho = \rho(\theta)$ $(\theta_1 \le \theta \le \theta_2)$

כאשר $\rho(\theta)$ גזירה ברדיוס, אז אורך העקום הוא:



$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\theta$$

פתרון פרמטריזציה קרטזית של העקום:

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cdot\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\cdot\sin\theta \end{cases}$$

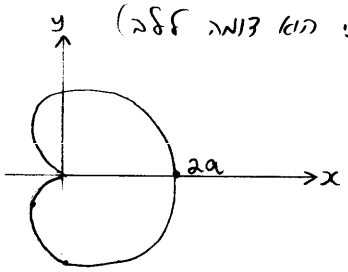
ולכן:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\dot{\rho}\cos\theta - \rho\sin\theta)^2 + (\dot{\rho}\sin\theta + \rho\cos\theta)^2}\, d\theta =$$

אינטגרלים קויים מסוג ראשון ומסוג שני.
משפט גרין.

תרגיל 3 המשוואה $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$ $(a>0)$

מתארת עקום משטחי שנקרא קרדיואידה (כי הוא דומה ללב)



(א) רשמו את אורך העקום.

(ב) מצאו את מרכז המסה, אם צפיפות המסה האורכית קבועה

פתרון

(א) נעבור לקואורדינטות קוטביות (ρ,θ) מתקיים $x^2+y^2=\rho^2$, $x=\rho\cos\theta$

ולכן משוואת העקום תהיה: $(\rho^2-a\rho\cos\theta)^2=a^2\rho^2$

מצמצמים ב ρ^2 $\Leftrightarrow$

$(\rho-a\cos\theta)^2=a^2$

$\Leftrightarrow$

$\rho-a\cos\theta=\pm a \quad \Leftrightarrow \quad \rho=a(\cos\theta\pm 1)$

ומכיוון ש $\rho\geq 0$ אנו מפרמטריזציה היא: $\rho=a(1+\cos\theta)$

$(0\leq\theta\leq 2\pi)$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\dot\rho^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a$$

(ב) נסמן ב (x_0,y_0) את מרכז הכובד. משיקולי סימטריה $y_0=0$

הנח"ל עניין שהצפיפות $=1$ $\Leftarrow$ $M=L=8a$ ולכן x_0 מתוש ע"י

האינטגרל הקוי מסוג ראשון: $x_0=\frac{1}{M}\int_C x\cdot 1\,ds=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}x\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt$

כאן: $x=x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta=a(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta$

ולפי שראינו קודם: $\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}=\sqrt{\rho^2+\dot\rho^2}=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$

לכן: $x_0=\frac{1}{8a}\int_0^{2\pi}2a^2(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

נשתמש בהזהויות: $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$, $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$ ונקבל:

$$x_0=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)\cdot\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=a\int_0^{\pi}\cos^3\frac{\theta}{2}\cdot\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)d\theta=\dots$$

(מחשבים בעזרת נוסחת הרקורסיה עבור $\int\cos^n x\,dx$)

אינטגרלים קויים מסוג ראשון ומסוג שני.
משפט גרין.

תרגיל 4 לחשב את מסת העקום

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = 4\sin t \\ z(t) = 3t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

אם צפיפות המסה האורכית נתונה ע"י $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

פתרון

המסה היא האינטגרל הקוי מסוג 1:

$$M = \int_C \rho(x,y,z)\,ds$$

ומכיוון שהעקום C נתון ברדיוסים אז ניתן לחשבו ע"י

$$= \int_0^{2\pi} \rho(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

כאן:

$$\rho(t) = \rho(x(t),y(t),z(t)) = 16\cos^2 t + 16\sin^2 t + 9t^2 = 16+9t^2$$

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9} = \sqrt{25} = 5$$

כלומר:

$$M = 5\int_0^{2\pi}(16+9t^2)\,dt = 160\pi + 5\cdot 3t^3\Big|_0^{2\pi} = 160\pi + 120\pi^3$$

אינטגרל קוי מסוג 1 לעומת אינטגרל קוי מסוג 2

יהי C עקום בעל אורך סופי עם פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (a \le t \le b)$$

(מניחים שהפונק' $x(t), y(t), z(t)$ גזירות ברדיוסים)

אינטגרל קוי מסוג 1 אם $f(x,y,z)$ פונקציה סקלרית רציפה (בסביבה של העקום) אז:

$$I_1 = \int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

משמעות: אם $f(x,y,z)$ מתארת צפיפות מסה אורכית אז I_1 = מסת העקום.

אינטגרל קוי מסוג 2 יהי $\vec{F}(x,y,z) = \hat{i}\,f_1(x,y,z) + \hat{j}\,f_2(x,y,z) + \hat{k}\,f_3(x,y,z)$

שדה וקטורי רציף בסביבת העקום C אז

$$I_2 = \int_C \vec{F}(x,y,z)\circ d\vec{r} \equiv \int_C f_1(x,y,z)\,dx + f_2(x,y,z)\,dy + f_3(x,y,z)\,dz$$

$$(d\vec{r} = \hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz)$$

מתושב ע"י

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\left(f_1(t)\cdot\dot{x} + f_2(t)\cdot\dot{y} + f_3(t)\cdot\dot{z}\right)dt$$

משמעות: אם $\vec{F}(x,y,z)$ מתאר את הכח שפועל על חלקיק שתנועתו מתוארת ע"י הפרמטריזציה הנ"ל אז I_2 מתאר את העבודה שמבצע הכח $\vec{F}$ על החלקיק במהלך התנועה.

אינטגרלים קויים מסוג ראשון ומסוג שני.
משפט גרין.

תרגיל 5 חלקיק נע במעגל במהירות זוויתית קבועה, ופועל עליו כח צנטריפטלי $\bar{F}$ שגודלו קבוע $|\bar{F}|=k$ והוא מכוון למרכז המעגל.
הראו שהכח איננו מבצע כל עבודה על החלקיק.

פתרון

הכח נתון שמדובר במעגל ברדיוס 1 במהירות זוויתית = 1 (רדיאן לשניה)
תנועת החלקיק לאורך קשת בגודל α רדיאנים מתוארת ע"י:

$$\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} dx &= -\sin t\, dt \\ dy &= \cos t\, dt \end{aligned}$$

הכח מתואר ע"י $\bar{F}(x,y) = -kx\hat{i} - ky\hat{j}$

(כי הרדיוס מהמרכז למעגל לנק' (x,y) שעל המעגל הוא $\bar{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$)

ולכן:

$$W=\int_C \bar{F}(x,y)\circ(\hat{i}dx+\hat{j}dy) = -k\int_C +x\,dx+y\,dy$$

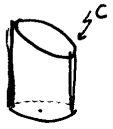
$$=-k\int_0^{\alpha}\left(\cos t\cdot(-\sin t)+\sin t\cdot\cos t\right)dt \quad =0$$

תרגיל 6

יהי C עקום התיחוך בין המשטחים $x^2+y^2=1$! $x+y+z=1$
לחשב את

$$\left|\int_C(-2y^3\hat{i}+2x^3\hat{j}-2z^3\hat{k})\circ d\bar{r}\right|$$

פתרון



המעגל C הוא אלפסה (חיתוך בין מישור לגליל)
נבחר עליו כיוון חיובי (כך שלא ישקר את הערך המוחלט של האינטגרל)

כלומר נקח פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=1-x-y=1-\cos t-\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$$

נחשב אינטגרל קוי (מסוג 2):

$$I=\int_C(-2y^3\hat{i}+2x^3\hat{j}-2z^3\hat{k})\circ(\hat{i}dx+\hat{j}dy+\hat{k}dz) =$$

$$=2\int_C -y^3dx+x^3dy-z^3dz$$

ראשית, מכיוון שמדובר במעגל סגור אז:

$$\int_C z^3dz = \left.\frac{z^4}{4}\right|_{z_0}^{z_0}=0$$

אינטגרלים קויים מסוג ראשון ומסוג שני.
משפט גרין.

כלומר:

$$I = 2\int_C -y^3dx + x^3dy = 2\int_0^{2\pi}\left[-\sin^3t\cdot(-\sin t) + \cos^3t\cdot\cos t\right]dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi}(\sin^4t + \cos^4t)\,dt$$

מכיוון שעשינו אינטגרציה על מחזור שלם אז $\int_0^{2\pi}\sin^4t\,dt = \int_0^{2\pi}\cos^4t\,dt$

ולכן:

$$I = 4\int_0^{2\pi}\cos^4t\,dt$$

נחשב:

$$\int_0^{2\pi}\cos^4t\,dt = \int_0^{2\pi}\underset{u}{\cos^3t}\cdot\underset{v'}{\cos t}\,dt \underset{\text{חלקים}}{=}$$

$$= \underbrace{\cos^3t\cdot\sin t\Big|_0^{2\pi}}_{0} + 3\int_0^{2\pi}\cos^2t\cdot\underbrace{\sin^2t}_{1-\cos^2t}\,dt = 3\int_0^{2\pi}\cos^2t\,dt - 3\int_0^{2\pi}\cos^4t\,dt$$

נשווה את שני הקצוות (ונעביר אגפים) =>

$$\int_0^{2\pi}\cos^4t\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2t\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \ldots = \frac{3}{4}\pi$$

ומכאן ש:

$$I = 4\int_0^{2\pi}\cos^4t\,dt = 3\pi$$

<u>כללה</u> בהמשך נפתור את השאלה בעזרת משפט סטוקס.

<u>משפט גרין</u>

יהי D תחום קשיר בעל שפה Γ
שמורכבת ממספר סופי של קווים סגורים וחלקים
ויהי $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\hat{i} + Q(x,y)\,\hat{j}$
שדה וקטורי המחלקה C^1 ב $\overline{D}$ (D כולל שפתו)
אז האינטגרל הקווי מסוג ב על השפה של D בכיוון החיובי

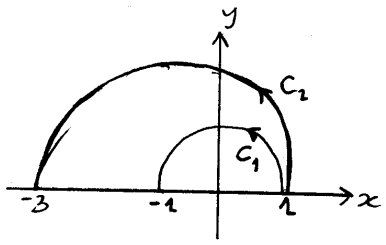
$$\int_{\partial D}\vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} \equiv \int_{\partial D}P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

מקיים:

$$\boxed{\int_{\partial D}P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D\left(Q'_x - P'_y\right)dxdy}$$

אינטגרלים קויים מסוג ראשון ומסוג שני.
משפט גרין.

תרגיל 7



יהיו: C_1 המקיים $x^2+y^2=1$, $0\le y$

C_2 המקיים $(x+1)^2+y^2=4$, $0\le y$

יהי $\vec F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}-y,\ \frac{x}{x^2+y^2}+x\right)$

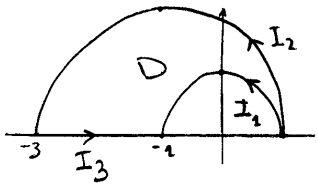
לחשב $I_1=\int_{C_1}\vec F\cdot d\vec r$, $I_2=\int_{C_2}\vec F\cdot d\vec r$

פתרון

כדי לחשב את I_1 נקח פרמטריזציה $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ $0\le t\le\pi$ של C_1 ונקבל.

$$I_1=\int_{C_1} f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy=\int_0^{\pi}(-2\sin t)(-\sin t\,dt)+(2\cos t)\cdot(\cos t\,dt)$$

$$=\int_0^{\pi}2(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=2\pi$$



את I_2 לא נחשב ישירות אלא בעזרת נוסחת גרין:

$$-I_1+I_2+I_3=\iint_D[Q'_x-P'_y]\,dx\,dy$$

מתקיים $Q'_x-P'_y=\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+1\right)-\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-1\right)=2$

ולכן $\iint_D[Q'_x-P'_y]dx\,dy=\iint_D 2\,dx\,dy=\underbrace{\pi\cdot 4-\pi\cdot 1}_{\text{פעמים השטח}}=3\pi$

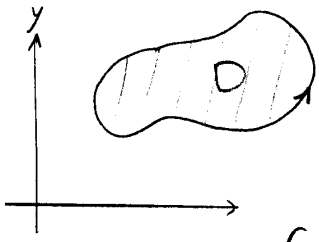
נחשב את I_3: פרמטריזציה: $\begin{cases}x(t)=t\\ y(t)=0\end{cases}$ $-3\le t\le -1$

$$I_3=\int_{-3}^{-1}[\underbrace{f_1(t)}_{=0}\cdot x'(t)+f_2(t)\cdot\underbrace{y'(t)}_{=0}]dt=0$$

ומסה"כ:

$$I_2=\iint_D[Q'_x-P'_y]dx\,dy+I_1-I_3=3\pi+2\pi-0=5\pi$$

אינטגרלים קויים מסוג ראשון ומסוג שני.
משפט גרין.



חישוב שטחים בעזרת נוסחת גרין

אם נבחרו פונקציות $P(x,y)$, $Q(x,y)$ כך שב-D
יתקיים $Q'_x - P'_y = 1$ אז נקבל

$$\text{השטח של } D = \iint_D 1\,dxdy = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

אפשרויות לבחירת P,Q כדי לחשב

(1) $Q=x,\ P=0 \Rightarrow$ $\quad |D| = \oint_{\partial D} x\,dy$

(2) $Q=0,\ P=-y \Rightarrow$ $\quad |D| = \oint_{\partial D} -y\,dx$

תרגיל 8

לחשב את שטח האלפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

פתרון נקח פרמטריזציה של השפה בביטוי חיובי:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

נשתמש בנוסחא:

$$\iint_D 1\,dxdy = \oint_{\partial D} x\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} x(t)\cdot y'(t)\,dt = ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt =$$

$$= ab\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \ldots = \pi ab$$