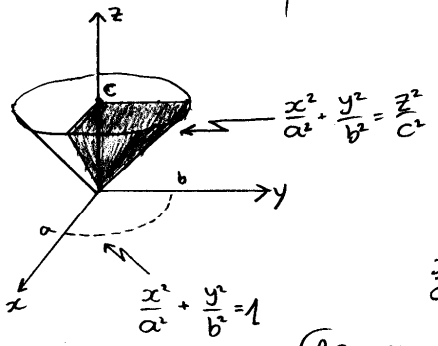
תרגיל 1

לחשב
$$I=\iiint_V \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$$

כאשר V הוא החלק של האוקטנט הראשון שחסום בין החרוט האלפטי: $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

לבין המישור $z=c$



פתרון

דרך א'

החיתוך של החרוט עם המישור $z=c$

הוא האלפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$

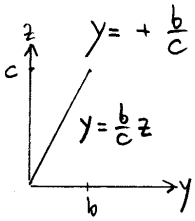
לכן אפשר לתאר את התחום האינטגרציה כתחום פשוט

באופן הבא:
$$0\le x\le a$$
$$0\le y\le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$
$$c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\le z\le c$$

ומקבלים:
$$I=\int_{x=0}^{a}\left[\int_{y=0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dz\right)dy\right]dx$$

דרך ב'

החיתוך של החרוט עם מישור yz $(x=0)$ הוא הישר $y=+\frac{b}{c}z$



ולכן אפשר לתאר את התחום כתחום פשוט גם באופן הבא:
$$0\le z\le c$$
$$0\le y\le \frac{b}{c}z$$
$$0\le x\le a\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

ומקבלים:
$$I=\int_0^c dz\int_0^{\frac{b}{c}z}dy\int_0^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx$$
$$=\int_0^c dz\int_0^{\frac{b}{c}z}dy\cdot\left.\frac{y}{\sqrt{z}}\cdot\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\int_0^c dz\int_0^{\frac{b}{c}z}\frac{1}{2\sqrt{z}}a^2\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\cdot y\,dy$$
$$=\int_0^c dz\cdot\frac{a^2}{2\sqrt{z}}\left[\frac{z^2}{c^2}\frac{y^2}{2}-\frac{1}{b^2}\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{\frac{b}{c}z}=\frac{a^2b^2}{8c^4}\int_0^c z^{7/2}\,dz=\frac{a^2b^2\sqrt{c}}{36}$$

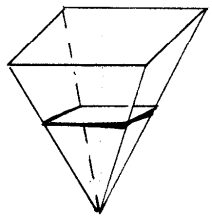
תרגיל 2

להראות שנפחה של פירמידה ששטח הבסיס S וגבהה H הוא $V=\frac{1}{3}SH$

פתרון

נפח הפירמידה A הוא: $V=\iiint_A 1\,dxdydz$

כאשר מתבוננים פירמידה ע"י משור מקביל לבסיס מקבלים פירמידה דומה שגבהה h והבסיס s(h)



$$I=\int_{h=0}^{H}\left(\iint_{S(h)} 1\,dxdy\right)dh$$

מתקיים היחס: $\frac{s}{S}=\frac{h^2}{H^2}$

כלומר: $\iint_{S(h)} 1\,dxdy = s(h) = \frac{S}{H^2}h^2$

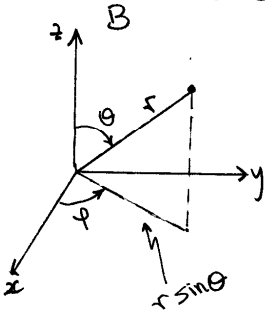
ולכן: $I=\int_{h=0}^{H}\frac{S}{H^2}h^2dh = \frac{S}{H^2}\cdot\frac{h^3}{3}\Big|_{h=0}^{H} = \frac{SH}{3}$

תרגיל 3

לחשב את מסתו של הכדור $B: x^2+y^2+z^2\le R^2$ אם המשקל הסגולי בנק' (x,y,z) הוא $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

פתרון

צריך לחשב את האינטגרל: $I=\iiint_B\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$



נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi<2\pi \\ 0\le r \end{matrix}$$

תמונת הראתקה של הכדור B עובר לתיבה:

$K: \quad (r,\varphi,\theta)\in[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$

ויעקוביאן של ההעתקה הוא: $|J|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right| = r\sin\theta$

$$I=\iiint_K r\cdot|J|\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R}r^3dr = 2\pi\cdot[-\cos\theta]_0^{\pi}\cdot\frac{R^4}{4} = \pi R^4$$

תרגיל 4 לחשב את נפח האלפסויד $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

פתרון

$$V=\iiint_E 1\,dx\,dy\,dz$$

נעבור לקואורדינטות כדוריות מוכללות

$$\begin{cases} x=ar\sin\theta\cos\varphi \\ y=br\sin\theta\cos\theta \\ z=cr\cos\theta \end{cases}$$

היעקוביאן של העתקה זו הוא: $|J|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\theta$

נמצא את תמונת התחום:

הרי ש: $0\le\theta\le\pi \quad 0\le\varphi\le 2\pi$

כדי למצוא את התחום של r נציב את הביטויים עבור x,y,z בתוך האלפסויד:

$$\frac{a^2r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{c^2r^2\cos^2\theta}{c^2}\le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2\sin^2\theta\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+r^2\cos^2\theta\le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2\le 1$$

ומקבלים את התיבה: $K: (r,\varphi,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$

ולכן

$$V=\iiint_K 1\cdot|J|\,dr\,d\theta\,d\varphi = abc\cdot\int_0^1 r^2\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$=abc\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2=\frac{4}{3}abc\,\pi$$

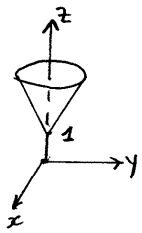
תרגיל 5

לחשב $I=\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$

כאשר V הוא התחום המרחבי החסום ע"י המשטחים:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}+1 \quad , \quad z=0 \quad , \quad x^2+y^2=2x$$

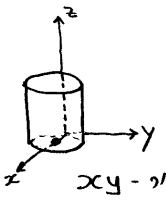
פתרון



נצרף את תחום האינטגרציה.

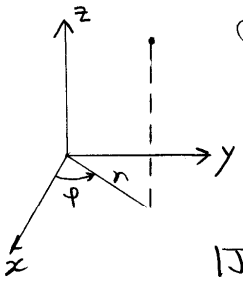
(*) המשטח: $z=\sqrt{x^2+y^2}+1$ הוא (חצי העליון של) החרוט המורם

(*) המשטח $x^2+y^2=2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$ הוא גליל (מוסב)



ותחום האינטגרציה הוא החלק של הגליל שבין החרוט לבין מישור xy

מתבקש לעבור לקואורדינטות גליליות $(x,y,z) \to (r,\varphi,z)$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad -\pi \le \varphi \le \pi$$

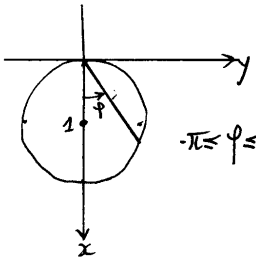
היעקוביאן של העתקה זו הוא $|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = r$

הביטוי שמתחת לאינטגרל יהפוך בשלבים הבאים ל- $z\sqrt{x^2+y^2} = zr$

נמצא את תמונת התחום

$$(x,y,z) \in V \rightsquigarrow (r,\varphi,z) \in \tilde{V}$$

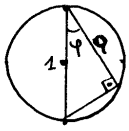
$$V = \{(x,y,z) \mid (x-1)^2+y^2 \le 1 \ , \ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}+1\}$$



$\Leftarrow$ הכיר ש: $0 \le z \le r+1$

מה יהיו התחומים המתאימים ל r,φ ? -

כדי לכסות את העיגול $(x-1)^2+y^2 \le 1$ נדרוש: $-\pi \le \varphi \le \pi$



$\Rightarrow a = 2\cos\varphi$

$\Leftarrow$ $0 \le r \le 2\cos\varphi$

מתקבלים את התחום (הבשלב)

$$\tilde{V}: \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 2\cos\varphi, \quad 0 \le z \le r+1$$

ולכן:

$$I = \iiint_{\tilde{V}} zr\,|J|\,d\varphi\,dr\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} dr \int_0^{r+1} (zr^2)\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2(r+1)^2\,dr = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left[\frac{r^5}{5}+\frac{1}{2}r^4+\frac{1}{3}r^3\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{16}{5}\cos^5\varphi + 4\cos^4\varphi + \frac{4}{3}\cos^3\varphi\right) d\varphi = \dots$$

בעזרת עבור $I_n = \int \cos^n x\,dx$

יש נוסחת נסיגה:

$$\begin{cases} I_n = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\ I_0 = x \quad I_1 = \sin x \end{cases}$$

(מקבלים ע"י אינטגרציה בחלקים)

תרגיל 6

$$B: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 10z \\ \Leftrightarrow \\ x^2+y^2+(z-5)^2 \le 25 \end{cases}$$

למצוא את מרכז הכובד של הכדור

אם הצפיפות הסגולי נתון ע"י $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

הפתרון

מרכז הכובד נמצא בנק' (x_0,y_0,z_0) אשר:

$$x_0=\frac{1}{M}\iiint_B x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

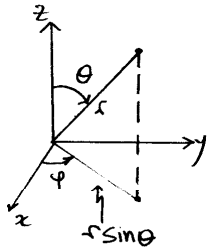
$$y_0=\frac{1}{M}\iiint_B y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$z_0=\frac{1}{M}=\iiint_B z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$M=\iiint_B \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

מסת הכדור

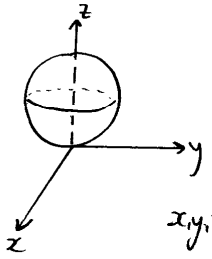
נעבור לקואורדינטות כדוריות



$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=r^2\sin\theta$$

מתקיים $\rho(r,\varphi,\theta)=r$



נמצא את תמונת הכדור B

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$0\le\varphi\le 2\pi$$

כדי למצוא את התחום המתאים ל-r נציב את הביטויים עבור x,y,z

באי-השוויון $x^2+y^2+z^2\le 10z$:

$$r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta\le 10r\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta\le 10r\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0\le r\le 10\cos\theta$$

ומכאן ש:

$$M=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{10\cos\theta}r\cdot r^2\sin\theta\,dr=\frac{2\pi}{4}\int_0^{\pi/2}10^4\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta$$

נציב $t=\cos\theta \Rightarrow dt=-\sin\theta\,d\theta$ נקבל:

$$10^4\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 t^4\,dt=10^4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5}=10^3\pi$$

ולכן:

$$\iiint_B x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{10\cos\theta} \underbrace{r\cos\varphi\sin\theta}_{x} \cdot \underset{\rho}{r} \cdot \underbrace{r^2\sin\theta}_{|J|}\, dr$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi}_{=0} \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{10\cos\theta} r^4 \sin\theta\, dr = 0$$

ולכן $x_0 = 0$ ובאופן דומה $y_0 = 0$

נמצא את z_0:

$$\iiint_B z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{10\cos\theta} \underbrace{r\cos\theta}_{z} \cdot \underset{\rho}{r} \cdot \underbrace{r^2\sin\theta}_{|J|}\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5} 10^5 \cos^5\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta\, d\theta$$

נציב $t = \cos\theta \Rightarrow dt = -\sin\theta\, d\theta$ ונקבל:

$$\frac{2}{5} 10^5 \pi \cdot \int_0^1 t^6\, dt = \frac{2}{5} \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{10^5 \pi}{15}$$

ומסה ℓ:

$$x_0 = \frac{1}{M}\left(\frac{10^5\pi}{15}\right) = \frac{100}{15} = 6\frac{2}{3}$$