תרגיל 1

למצוא מרחק מינימלי בין נקודות על הפרבולויד: $z=x^2+y^2$
לבין נקודות על המישור: $2x+2y+z+5=0$

תרגיל 2 נתונה משוואה $(*)\ F(x,y,z)=0$ כאשר $F(x,y,z)\in C^1(\mathbb{R}^3)$
וכן: $F'_z(1,1,2)=0$, $F(1,1,2)=0$

נכון\לא נכון

(א) המשוואה (*) מגדירה פונק' $z=z(x,y)$ ממחלקה C^1 בסביבה של: $(x_0,y_0)=(1,1)$

(ב) המשוואה (*) מגדירה פונק' $x=x(y,z)$ ממחלקה C^1 בסביבה של $(y_0,z_0)=(1,2)$

(ג) אם בנוסף, $F'_y(1,1,2)\neq 0$ אז המשוואה (*) מגדירה פונק' $z=z(x,y)$
ממחלקה C^1 בסביבה של $(x_0,y_0)=(1,1)$

(ד) אם בנוסף $F'_y(1,1,2)\neq 0$ אז $z'_x(1,1)=0$

תרגיל 3 נתונה מערכת $(*)\ \begin{cases} xy+uv=1 \\ xu+yv=1 \end{cases}$

(א) באילו תנאים מהטיפוס מבטיח הפונקציה הסתימה שהמערכת (*) מגדירה פונקציות
$v=v(x,y)$ $u=u(x,y)$ ממחלקה C^1 בסביבה של (x_0,y_0,u_0,v_0)

(ב) נניח שבסביבת נק' $(1,1,u_0,v_0)$ אשר $v_0>0$ המערכת (*) אכן מגדירה
$u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ ממחלקה C^1.
תשבו לחצרת מכיוונת של הפונק' $v(x,y)$ בנק' $(1,1)$ בכיוון של $\vec{\nabla}u(1,1)$.

תרגיל 4 תרשו $f(x,y)$ מוגדרת ובעלת נ"ח $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ בכל נק' $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
ונניח שלכל a,b קבועים שני הפונקציות: $\varphi(x)=f'_x(x,b)$ $\psi(y)=f'_y(a,y)$
הן פונקציות רציפות. (כפונקציות של משתנה יחיד)

להוכיח או להפריך:

$$(*)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[f(a+x,b+y)-f(a,b)\right]\sin xy = 0$$

תרגיל 5 **נכון\לא נכון**

(א) אם $f(x,y)$ מוגדרת ב $\mathbb{R}^2$ ומקיימת לכל $(x,y)\neq(0,0)$:

$$(*)\ f(x,y)=f(0,0)+x-2y+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

אז: למשטח - $z=f(x,y)$ יש מישור משיק בנק' $(x,y)=(0,0)$

(ב) נתון שהפונקציה $f(x,y,z)$ איננה דיפרנציאבילית בנק' (x_0,y_0,z_0)
וכך ש $f(x_0,y_0,z_0)=0$

אז למשטח $f(x,y,z)=0$ אין משיק בנק' (x_0,y_0,z_0) שעליו.

תרגיל 6 תהי $\varphi(x)=\int_{x^2}^{e^x}\frac{\sin xu}{u}\,du$

נכון/לא נכון

רמז: התבונן בפונקציה: $f(x,u)=\begin{cases}\frac{\sin xu}{u}, & u\neq 0\\ x, & u=0\end{cases}$

(א) $\varphi(x)$ רציפה ב $\mathbb{R}$

(ב) $\varphi(x)$ גזירה לכל $x\neq 0$! $\varphi'(x)=(1+\frac{1}{x})\sin(xe^x)-3\frac{\sin x^3}{x}$

(ג) $\varphi(x)$ גזירה עבור $x=0$! $\varphi'(0)=1$

תרגיל 7 **נכון/לא נכון**

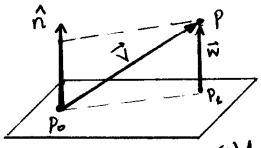
$f(x,y)=x\left(\sqrt{x^2-y^2-a^2}+b^2\right)$ ומתקיים: $f(2,-1)=2,\quad f(-3,2)=-5$

אז למשטח הערך הביניים ניתן להסיק שקיימת (x_0,y_0) כך ש $f(x_0,y_0)=-1$

פתרונות

תרגיל 1

תזכורת: המרחק בין נקודה $P=(x,y,z)$ לבין המישור $\pi: Ax+By+Cz+D=0$
הוא:
$$d(\pi,P)=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



הסבר: הוא $\hat{n}=\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ נורמל יחידה ל π

ותהי $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ נקודה כלשהי על π $\Leftarrow$ $(*)\ Ax_0+By_0+Cz_0=-D$

נסמן: $\vec{v}=P-P_0=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$

אז ההטלה של $\vec{v}$ בכיוון $\hat{n}$ הוא:
$$\vec{w}=(\vec{v}\circ\hat{n})\hat{n}\underset{(*)}{=}\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\hat{n}$$

המרחק בין הנק' P למישור π הוא:
$$d(P,\pi)=|\vec{w}|=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

כמו כן, הנק' P_1 על המישור π הקרובה ביותר לנק' P הוא: $P_1=P-\vec{w}$

(באופן דומה המרחק בין נק' (x_0,y_0) במישור לבין ישר $L: Ax+By+C=0$ הוא $d(P,L)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$)

פתרון תהא $f(x,y,z)$ ריבוע המרחק בין נק' (x,y,z) לבין המישור $2x+2y+z+5=0$

כלומר: $f(x,y,z) = \frac{(2x+2y+z+5)^2}{9}$

נמצא מינימום של $f(x,y,z)$ לפי נק' שנמצאות על הפרבולויד: $z=x^2+y^2$ (*)

כאשר כמובן בעיה של מינימום תחת אילוץ ואפשר להשתמש בספרי לצרכי

אבל יותר פשוט להציב את (*) ב $f(x,y,z)$ ולמצוא מינימום של:

$$g(x,y) = f(x,y,x^2+y^2) = \frac{1}{9}(2x+2y+x^2+y^2+5)^2$$

נקודות קריטיות:

$$\begin{cases} g'_x = \frac{2}{9}(2x+2y+x^2+y^2+5)(2+2x) = 0 \\ g'_y = \frac{2}{9}(2x+2y+x^2+y^2+5)(2+2y) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2+2x=0 \\ 2+2y=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x=y=-1$ או $2x+2y+x^2+y^2+5=0$ $\Leftrightarrow$ (השלמה לריבוע) $(x+1)^2+(y+1)^2+3=0$ $\Leftrightarrow$ $\emptyset$

קבלנו נק' קריטית יחידה $(x_0,y_0)=(-1,-1)$ שמתיבת לכיוון המינימום של $g(x,y)$

(הרי שלפונקציה $g(x,y)$ יהיה מינימום גלובלי ולא יהיה מקסימום)

ומכאן שמינימום המרחק בין המישור לפרבולויד הוא $\sqrt{g(-1,-1)} = 1$

(הנקודה על הפרבולויד שבה זה מתקבל הוא $P=(x_0,y_0,z_0)=(-1,-1,2)$

והנק' המתאימה לה על המישור היא הנק' P_1 על המישור שקרובה ביותר ל P)

תרגיל 2

א) **לא נכון** לפי משפט הפונקציה הסתומה: התנאי $F'_z(1,1,2)\neq 0$ הוא מספיק

אבל לא הכרחי לכן שהמשוואה (*) תגדיר $z=z(x,y)$ ממחלקה C^1.

ב) **לא נכון** לא נוכל לומר דבר כזה כיוון שאין כל אינפורמציה לגבי $F'_x(1,1,2)$

ג) **נכון** **הוכחה**: מהנתון הנוסף נובע ש (*) מגדירה $y=y(x,z)$ ממחלקה C^1 בסביבה

של $(x_0,z_0)=(1,2)$. אנו השלנו ש (*) מגדירה $z=z(x,y)$ ממחלקה C^1 בסביבה

של $(x_0,y_0)=(1,1)$.

נראה שמתקיים $y'_z(x_0,z_0)=0$ ומזה שגם: $z'_y(x_0,y_0)=\frac{1}{y'_z(x_0,z_0)}$ ומכאן נקבל סתירה ($z'_y<\infty$)

כדי להראות ש: $y'_z(x_0,y_0)=0$ נרשום את (*) בצורה:

$$F(x,\ y(x,z),\ z)=0$$

ולגזור לפי z בנק' (x_0,y_0,z_0) $\Rightarrow$

$$\overbrace{F'_y(x_0,y_0,z_0)}^{\neq 0}\cdot y'_z(x_0,z_0)+\overbrace{F'_z(x_0,y_0,z_0)}^{=0}=0$$

$$\Rightarrow \quad y'_z(x_0,y_0)=0$$

כלומר, בגלל ש $z'_y(x_0,y_0)=\frac{1}{y'_z(x_0,z_0)}$ נובעת מכך ש $\varphi(y)=z(x_0,y)$

ו- $\psi(z)=y(x_0,z)$ יש פונק' הופכית.

דרך נוספת לראות כאן היא לרשום: $z=z(x,y)=z(x,y(x,z))$

ולגזור לפי z (בנק' (x_0,y_0,z)):

$$1=z'_y(x_0,y_0)\cdot y'_z(x_0,z_0).$$

בסה"כ ראינו בגלל סיבה כי אין מניחים ש $z(x,y)\in C^1$ $\Rightarrow$ $z'_y(x_0,y_0)<\infty$

ג) <u>לגבי</u> לפי סעיף ב' בדיקה כבר המשוואה איך מגדירה $z=z(x,y)\in C^1$.

<u>תרגיל 3</u>

א) נתון מערכת מהצורה

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}\qquad F,G\in C^1$$

ולכן הנקודות הם: (1) (x_0,y_0,u_0,v_0) הוא פתרון של (*)

(2) $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}=\left.\begin{vmatrix}F'_u, & F'_v\\ G'_u, & G'_v\end{vmatrix}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0$$

ב) יהי $\hat{n}=\frac{\vec{\nabla}u(1,1)}{|\vec{\nabla}u(1,1)|}$ אז: $\frac{\partial}{\partial\hat{n}}v(1,1)=\hat{n}\circ\vec{\nabla}v(1,1)$

ולכן צריך לחשב $\vec{\nabla}v(1,1)=?$ $\quad\vec{\nabla}u(1,1)=?$

גזירת (*) לפי x:

$$\begin{pmatrix}v & u\\ x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'_x\\ v'_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\ -u\end{pmatrix}\quad(1)\iff\begin{cases}y+u'_x v+u v'_x=0\\ u+x u'_x+y v'_x=0\end{cases}$$

גזירת (*) לפי y:

$$\begin{pmatrix}v & u\\ x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'_y\\ v'_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ -v\end{pmatrix}\quad(2)\iff\begin{cases}x+u'_y\cdot v+u\cdot v'_y=0\\ x u'_y+v+y v'_y=0\end{cases}$$

כדי שנוכל להציב מ (1)+(2) את u'_x, u'_y, v'_x, v'_y בנק' $(x_0,y_0)=(1,1)$

צריך למצוא את $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$

נציב ב (*) $x=y=1$ ונקבל:

$$\begin{cases} u_0\cdot v_0=0 \\ u_0+v_0=1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u_0=1-v_0 \\ v_0(1-v_0)=0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} v_0=0 \\ u_0=1 \end{cases} \text{ או } \begin{cases} v_0=1 \\ u_0=0 \end{cases}$$ ומכיוון שנתון $v_0>0$ אז $\begin{cases} u_0=0 \\ v_0=1 \end{cases}$

כעת, במקרה (1)+(2) נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_x \\ v'_x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_y \\ v'_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ פתרון ומקבלים $\vec{\nabla} u(1,1)=(-1,-1)$, $\vec{\nabla} v(1,1)=(1,0)$

ולכן הנגזרת בכיוון

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}} v(1,1)=\frac{\vec{\nabla} u(1,1)}{|\vec{\nabla} u(1,1)|}\cdot\vec{\nabla} v(1,1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

תרגיל 4

לא נכון

הערה: אילו היה נתון שגם הפונקציות $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ הן רציפות (כפונקציות של שני משתנים) אז הפונקציה $f(x,y)$ היתה דיפרנציאבילית בנקודה. במקרה כזה היה מתקיים

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[f(a+x,b+y)-f(a,b)\right]=0$$

והווצאי ש(*) היא נכון.

אולם, קיום של נ"מ (ואפילו התכנסות ש $f'_x(x,b)$ $f'_y(a,y)$ רציפות) לא מבטיח דיפרנציאבילות (אפילו לא רציפות) של $f(x,y)$.

דוגמא נגדית לטענה

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^4+y^4} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

נמצא נ"מ (ב (0,0) נצטרך לפי ההגדרה)

$$f'_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y(y^4-3x^4)}{(x^4+y^4)^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad , \quad f'_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(x^4-3y^4)}{(x^4+y^4)^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

נראה שלכל x_0,y_0 שני הפונקציות $f'_x(x,y_0)$, $f'_y(x_0,y)$ רציפות (כפונקציות של משתנה אחד) ולמרות כאלה לא מתקיים (*).

נראה למשל שעבור y_0 קבוע הפונקציה: $f'_x(x,y_0)$ רציפה

- אם $y_0\neq 0$ אז: $f'_x(x,y_0)=\frac{y_0(y_0^4-3x^4)}{(x^4+y_0^4)^2}$ רציפה עבור $x\in\mathbb{R}$

- אם $y_0=0$ אז (בדקו) $f'_x(x,0)\equiv 0$ $\Leftarrow$ רציפה עבור $x\in\mathbb{R}$.

<u>נראה כעת שעבור $a=b=0$ לא קיים הגבול (*):</u>

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[f(x,y)-f(0,0)\right]\sin xy=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^4+y^4}\sin xy=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin xy}{xy}\right)}_{\to 1}$$

והגבול האחרון לא קיים (בדקו מסלול: $y^2=kx^2$) ■

<u>שאלה</u> מכיוון ש $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin xy=0$, אז אם נראה שעבור $(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$

(כלומר $|x|\le 1,|y|\le 1$) מתקיים: $\left|\left[f(a+x,b+y)-f(a,b)\right]\right|\le M$ (**)

אז נוכל לבסיס שהגבול (*) כן נכון!

<u>נסו למצוא מה לא בקין בהוכחה הבאה של הסימן הבלתי (**) בסביבה של (a,b):</u>

$$\left|f(a+x,b+y)-f(a,b)\right|\le\left|f(a+x,b+y)-f(a,b+y)\right|+\left|f(a,b+y)-f(a,b)\right|$$

נראה שכאן משתמשים באי-שוויונים האחרונים חסום עבור $|x|,|y|\le 1$

- הפונקציה $\varphi(y)=f(a,y)$ גזירה ברציפות, עבור $-1\le y\le 1$ נקבל לפי לגרנז':

$$\left|f(a,b+y)-f(a,b)\right|=\left|\varphi(b+y)-\varphi(b)\right|=\left|\varphi'(c)\right|\cdot|y|$$

כאשר $c\in[b-1,b+1]$. $\varphi'(y)$ רציפה ולכן חסומה בקטע הסגור $[b-1,b+1]$

ולכן הבלתי האחרון חסום עבור $|y|\le 1$

- הפונקציה $\psi(x)=f(x,b+y)$ גם כן גזירה ברציפות (y קבוע)

ולכן מאותם נימוקים גם המתבר: $\left|f(a+x,b+y)-f(a,b+y)\right|$

יהיה חסום עבור $|x|\le 1$.

<u>תשובה</u>

$M=M(y)$: לא. יוצא שזה $\sup_{x\in[-1,1]}\{\ldots\}$ (שימו לב)

$\psi(x)=f(x,b+y)$ אינו רציף אם אינו גזיר ולכן אי אפשר

תרגיל 5

(א) למשטח שנתון בצורת של פונקציה בשני משתנים $z=f(x,y)$

יש מישור משיק הנתון - (x_0,y_0,z_0) שעליו $(z_0=f(x_0,y_0))$

אומר: $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב (x_0,y_0) כלומר

אומר: קיימים קבועים A,B כך ש: $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$

כאשר $\frac{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \xrightarrow[\Delta y\to 0]{\Delta x\to 0} 0$

במקרה כזה $A=f'_x(x_0,y_0)$ $B=f'_y(x_0,y_0)$ ומשוואת המישור המשיק היא

$z=z_0+A\cdot(x-x_0)+B(y-y_0)$

עלינו לבדוק, אישור, האם הנתון $(*)\ f(x,y)=f(0,0)+x-2y+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

מבטיח דיפרנציאבילית של $f(x,y)$ ב $(0,0)$

נוסחה 1 נסמן $\varepsilon(x,y)=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. אם יתקיים $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ אז נקבל

שיש דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ והקבועים A,B הם $A=1,\ B=-2$

אבל, אם קיים הגבול: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(בדקו מסלולים $y=kx$)

ומכן נסיון זה נכשל.

נוסחה 2 נחשב $f'_x(0,0)$ $f'_y(0,0)$ (המועמדים להיות הקבועים A,B)

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x^2-y_0^2}{\sqrt{x^2+y_0^2}}+x-2y_0\right)\Big|_{y_0=0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}+x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{|x|}+1\right)$$ — לא קיים.

$\Leftarrow$ לא קיימת הנ"ח $f'_x(0,0)$ $\Leftarrow$ $f(x,y)$ אינה דיפרנציאבילית ב $(0,0)$

$\Leftarrow$ למשטח $z=f(x,y)$ אין מישור משיק ב $(x_0,y_0)=(0,0)$

הטענה אינה נכונה

ב) לא נכון

הסבר: כאשר משטח נתון במשטח רמה של פונקציה בשלושה משתנים:

$f(x,y,z)=0$ אשר $f(x_0,y_0,z_0)=0$

אז הדיפרנציאבילי של הפונקציה $f(x,y,z)$ בנק' (x_0,y_0,z_0)

אינה תנאי הכרחי לקיום מישור משיק למשטח בנק' (x_0,y_0,z_0) שעליו.

(באמת, עבור משטח שנתון כגרף $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילי הוא תנאי הכרחי ומספיק)

אולם, אם $f(x,y,z)$ דיפרנציאבילי ב (x_0,y_0,z_0) ! $\vec{N}=\vec{\nabla}f(x_0,y_0,z_0)\neq\underline{0}$

אז קיים מישור משיק עם נורמל $\vec{N}$.

דוגמא $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$ $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,0)$

המשטח $f(x,y,z)=0$ הוא הספרה: $x^2+y^2+z^2=1$

יש לו מישור משיק בכל נקודה עליו ובפרט בנק' $(1,0,0)$, אבל f

אינה דיפרנציאבילי ב $(1,0,0)$

כאשר מישור שבנק' $(1,0,0)$ נמצאת על השפה של תחום ההגדרה של f

ומהגדרת דיפרנציאבילי ב נק' (x_0,y_0,z_0) דורשים ש-f תהיה מוגדרת בסביבה שלה

שנה, מפני שלא קיימת $f'_z(1,0,0)$ כי

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(1,0,z)-f(1,0,0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{1+z^2-1}-0}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{|z|}{z}$$ לא קיים. ←

תרגיל 6

כאשר נשים לב שלכל $x_0\in\mathbb{R}$ מתקיים $\int_{x_0^2}^{e^{x_0}}\frac{\sin ux_0}{u}\,du=\int_{x_0^2}^{e^{x_0}}f(x_0,u)\,du$

ונצא מישמ שבתחום האינטגרציה: $u\in[x_0^2,e^{x_0}]$ יש שוויון בין האינטגרנדים

פרט (אולי) לנק' אחת.

א) נכון הפונקציה: $f(x,u)=\begin{cases}\frac{\sin xu}{u}, & u\neq 0\\ x, & u=0\end{cases}$

רציפה (נפונקציה של שני משתנים) בכל נקודה $(x_0,u_0)\in\mathbb{R}^2$ כי:

- אם $u_0\neq 0$ אז הקלוי $\frac{\sin xu}{u}$ רציף בסביבת (x_0,u_0)

- אם $u_0=0$ אז: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ u\to 0}}\frac{\sin xu}{u}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ u\to 0}}x\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin xu}{xu}\right)}_{\to 1}=x_0=f(x_0,0)$

ומכאן (לפי משפט) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{e^x}f(x,u)\,du$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$

(ב) נבדוק תחום של $f'_x(x,u)$ נתון: $f'_x(x,u)=\begin{cases}\cos(xu), & u\neq 0\\ 1, & u=0\end{cases}$

בוודאי אינטגרבילי לפי לבגיק שכן פונקציה רציפה (כפונקציה של שני משתנים) ב- $\mathbb{R}^2$

ולכן לפי תכונה של כלל לייבניץ מקבלים ש $\varphi(x)=\int_{x^2}^{e^x} f(x,u)\,du$

גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$ בנקודה x_0 היא:

$$\varphi'(x_0)=\int_{x_0^2}^{e^{x_0}} f'_x(x_0,u)\,du + f(x_0,e^{x_0})\cdot(e^x)'\big|_{x_0} - f(x_0,x_0^2)\cdot(x^2)'\big|_{x_0}$$

ועבור $x_0\neq 0$ נקבל:

$$=\int_{x_0^2}^{e^{x_0}}\cos(x_0\cdot u)\,du + \frac{\sin(x_0e^{x_0})}{e^{x_0}}\cdot e^{x_0} - \frac{\sin(x_0^3)}{x_0^2}\cdot 2x_0$$

$$=\frac{1}{x_0}\sin(x_0u)\Big|_{u=x_0^2}^{e^{x_0}} - \sin(x_0e^{x_0}) - 2\frac{\sin(x_0^3)}{x_0} =$$

$$=\left(1+\frac{1}{x_0}\right)\cdot\sin(x_0e^{x_0}) - 3\frac{\sin(x_0^3)}{x_0}$$

(ג) נתון כבר כי $\varphi(x)$ גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$ ועבור $x_0=0$ אפשר לחשב $\varphi'(0)$ בעזרת כלל לייבניץ ולקבל $\varphi'(0)=1$

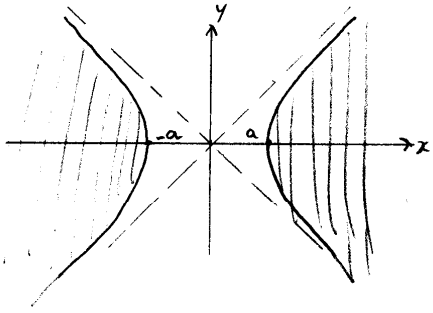
דרך אחרת: להשתמש במשפט מתקבוא 1: $\varphi(x)$ רציפה ב $\mathbb{R}$ וגזירה לכל $x\neq 0$

אם קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=L$ אז $\varphi(x)$ גזירה גם בראפס! $\varphi'(0)=L$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\sin(xe^x)-3\frac{\sin x^3}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\underset{\downarrow 0}{\sin(xe^x)}+\underset{\downarrow 1}{e^x}\cdot\underset{\downarrow 1}{\left(\frac{\sin(xe^x)}{xe^x}\right)}-\underset{\downarrow 0}{3x^2}\cdot\underset{\downarrow 1}{\left(\frac{\sin x^3}{x^3}\right)}\right]=1\Rightarrow\varphi'(0)=1$$



תרגיל 7 הסיקה לפי נגזרת

תחום הגדרה של $f(x,y)=x\left(\sqrt{x^2-y^2-a^2}+b^2\right)$,

$x^2-y^2\geq a^2$ איזון הקשיר

והנקודות $(2,-1)$! $(-3,2)$

נמצאות בשני רכיבי קשירות שונים ומכאן שלא ניתן להשתמש במשפט ערכ"ב.