תכונות הגרדיאנט. פונקציות סתומות.

תרגיל 1 תהא $g(x,y)$ בעלת נ"ר רציפות אשר: $g(2x, x^2+1)=4$ (*)

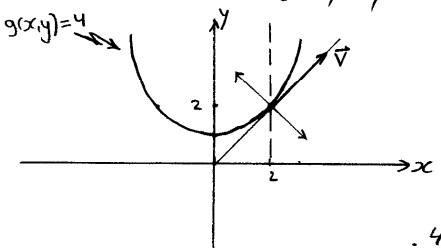
לחשב את הצורה בין $\vec{\nabla} g(2,2)$ לבין ציר y.

פתרון

הצורה (*) למעשה נותנת לנו פרמטריזציה של קו הגובה $g(x,y)=4$ והיא $\begin{cases} x(t)=2t \\ y(t)=t^2+1 \end{cases}$

בנקודה $P_0=(2,2)$ נמצאת על קו הגובה הזה ($t=1$) ולכן $\vec{\nabla} g(2,2)$

מאונך לקו הגובה בנקודה P_0. נמצא את כיוון המשיק לקו הגובה ב P_0:



$$\vec{v} = (x'(t), y'(t))\Big|_{t=1} = (2,2)$$

מכיוון שהצורה בין $\vec{v}$ לבין ציר y היא $45°$

! $\vec{\nabla} g(2,2) \perp \vec{v}$

אז גם הצורה בין $\vec{\nabla} g(2,2)$ לציר y היא $45°$.

תרגיל 2

נתונה פונ' הקיבוץ באיזור מסוים לפי ע"י: $f(x,y) = y^2-x^2$

משחררים כדור קטן על פני המשטח בנקודה ששיעורי xy שלה הם $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

(א) מה יהא הכיוון המרחבי שאלו יתחיל הכדור לנוע.

(ב) מה יהיה מסלול התנועה של הכדור.

פתרון

(א) נסמן ב $\hat{v}=(a,b,c)$ את הכיוון המרחבי שאלו יתחיל הכדור לנוע

מצד אחד - $(a,b) \parallel -\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = (2x_0, -2y_0)$ (כי הכיוון זה הכיוון של המירב מקסימלי)

מצד שני $\hat{v}$ שייך למישור שמשיק למשטח - $z=f(x,y)$ בנק' (x_0,y_0)

כלומר $\hat{v} \perp \vec{N}$ כאשר $\vec{N}$ הוא הנורמל של $F(x,y,z)=z+x^2-y^2=0$

$$\vec{N} = \vec{\nabla} F = (2x_0, -2y_0, 1)$$

$\Leftarrow$ בתור התחלה נקח $\vec{v}=(2x_0, -2y_0, c)$ ונדרוש $\vec{v} \circ \vec{N} = 0$

$\Leftarrow$ $$c = -4x_0^2 - 4y_0^2$$

ואם נערוך נקבל:

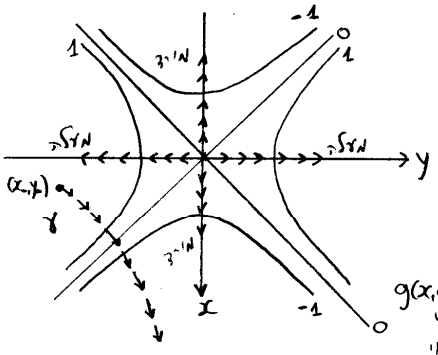
$$\hat{v} = \frac{(2x_0, -2y_0, -4x_0^2-4y_0^2)}{\sqrt{4x_0^2+4y_0^2+16(x_0^2+y_0^2)^2}}$$

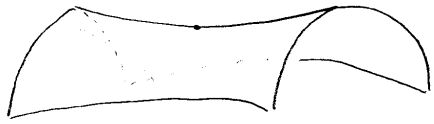
(ב) נניח שמסלול התנועה נתון ע"י $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ ההנחה שהכדור מתגלגל על הקיבוץ $z(t) = f(x(t), y(t))$

ולכן מספיק לתאר את המסלול: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ (במישור xy)

מסלול כזה חוצה את קווי הגובה של $f(x,y)$ בנצב

קווי הגובה הם: $y^2-x^2=c$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} c=0 \Leftarrow \text{שני ישרים } y=\pm x \\ c\neq 0 \Leftarrow \text{היפרבולה} \end{cases}$





נחפש עקום γ במישור xy מהצורה $g(x,y)=C$ שעובר דרך הנקודה (x_0,y_0) ומתאים את קווי הגובה של $f(x,y)$ בנצב כלומר $\vec{\nabla} g(x,y) \perp \vec{\nabla} f(x,y)$

$$(g'_x(x,y),\ g'_y(x,y))\circ(-2x,2y)=0$$

$$2x\cdot g'_x = 2y\cdot g'_y$$

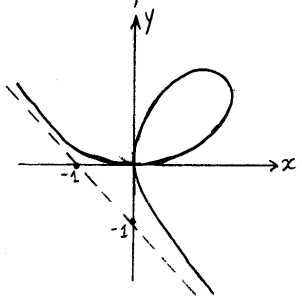
$g(x,y)=xy$ מתאימה (כי $g'_x=y,\ g'_y=x$)

$\Leftarrow$ העקום המבוקש הוא: $\gamma:\ xy=C=x_0y_0$

(זאת היפרבולה אסימפטוטית לציר x שהוא "המדרון הקלוע")

פונקציה סתומה

תרגיל 3 העקום $x^3+y^3-3xy=0$ (1) בקרבת הנקודה של דקרט



באילו נקודות (x_0,y_0) על העקום קיימת סביבה שבה ניתן לתאר את העקום כגרף: $y=y(x)$ ומה שיפוע הגרף שם?

פתרון

העקום נתון בצורה סתומה $F(x,y)=0$ (*)

כאשר $F(x,y)=x^3+y^3-3xy$ רציפה ובעלת נ"ר רציפים

משפט הפונקציה הסתומה מבטיח שלנקודות (x_0,y_0) על העקום שבהן $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ יש סביבה שבה (*) מגדיר $y=y(x)$ שהוא גזירה ו- $y(x_0)=y_0$

שימוש הנקיים בנקודה כאשר הינו מוגדר $y'(x_0)$ כדי לחשב נשים:

$$F(x,y(x))=0$$

ונגזור לפי x $\Leftarrow$ $F'_x(x,y(x))\cdot 1+F'_y(x,y(x))\cdot y'(x)=0$

נציב $x=x_0$ $y(x_0)=y_0$ ונקבל:

$$y'(x_0)=\frac{-F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}=-\frac{3x_0^2-3y_0}{3y_0^2-3x_0}$$

<u>בדיקת בעלי נקודות על הנקיים מתאפסת בעזרת:</u>

אלו נקודות שייכות לנקיים ובהן $F'_y=0$ כלומר:

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\F'_y(x,y)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^3+y^3-3xy=0\\3y^2-3x=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=y^2\\y^6=2y^3\end{cases}\iff(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})\quad \text{או}\quad(0,0)$$

נשים לב שבמידה שבנקודה $(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$ מתקיים $F'_x(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})\neq 0$ $\Leftarrow$ ניתן לחלק $x=x(y)$ בגלל ש- $(0,0)$ גם $F'_x(0,0)=0$ ובנקודה זו רשאים מרגע שלא ניתן להבדיל את הנקיים כפונקציה $y=y(x)$ או $x=x(y)$.

<u>שאלה</u> נתונה משוואה $F(x,y)=0$ (*) ונקודה (x_0,y_0) שבמידת אמת.

מניח ש $F(x,y)$ רציפה ובלתי נ"ז רציפות הסביבה של (x_0,y_0) וש- $F'_y(x_0,y_0)=0$ האם ניתן לקבוע שלא קיימת סביבה של הנקודה שבה (*) מגדיר $y=y(x)$?

<u>תשובה</u> <u>לא ניתן לקבוע דבר בצד</u> כי משפט הפונקציה הסתומה מספק תנאי מספיק אבל לא הכרחי

<u>דוגמא:</u> $F(x,y)=y^3-x^3$ $(x_0,y_0)=(0,0)$

מתקיים $F(0,0)=0$ וגם $F'_y(0,0)=0$ אבל המשוואה:

$$F(x,y)=0\iff y^3=x^3\iff y=x$$

מגדירה גם $y=y(x)$ וגם $x=x(y)$.

<u>תרגיל 4</u>

נתונה משוואה: $(1)\ y^3+6x\sin y+8=0$

(א) להראות שבסביבת הנקודה $(-2,0)$ קיים פתרון מהצורה $y=y(x)$

(ב) למצוא את פיתוח טיילור מסדר 2 של הפתרון הנ"ל סביב אפס.

פתרון

(א) מדובר במשוואה מהצורה $(*)\quad F(x,y) = y^3+6x\sin y+8=0$

כאשר $F(x,y)$ רציפה ובעלת נ"מ רציפה ! $(0,-2)$ פתרון.

$$F'_y(0,-2) = \left(3y^2+6x\cos y\right)\Big|_{(0,-2)} = 12 \neq 0$$

ולכן משפט הפונקציה הסתומה מבטיח שבסביבה של $(0,-2)$ יש פתרון מהצורה $y=y(x)$

(ב) הפתרון הנ"ל גזיר ומקיים $y(0)=-2$. אין לנו דרך לחלץ את הפתרון אבל ניתן לבנות קירוב שלו עד $x=0$ ע"י פיתוח טיילור:

למשל מסדר 2: $y(x) \sim y(0)+y'(0)\cdot x+\frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2$

$y(0)=-2$ ועלינו לחשב $y'(0)=?$ $\quad y''(0)=?$

נציב:

$$y^3(x)+6x\cdot\sin y(x)+8=0$$

גזירה לפי x: $\quad (1)\quad 3y^2(x)\cdot y'(x)+6\sin y(x)+6x\cos y(x)\cdot y'(x)=0$

גזירה נוספת:

$$(2)\quad 6y\cdot y'^2+3y^2\cdot y''+6\cos y\cdot y'+6\cos y\cdot y'-6x\sin y\cdot y'+6x\cos y\cdot y''=0$$

נציב ב (1) $x=0$ $y(0)=-2$ ונקבל: $y'(0)=\frac{\sin 2}{2}$

נציב ב (2) $x=0$ $y(0)=-2$! $y'(0)=\frac{\sin 2}{2}$ ונקבל: $y''(0)=\frac{1}{4}\sin 2\left(\sin 2-2\cos 2\right)$

תרגיל 5

לבראות שהמעבר $\quad (1)\begin{cases} u=\ln(x^2+y^2) \\ v=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\end{cases}\quad x>0$

מגדיר $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{cases}$ בעלות נ"מ רציפות

פתרון מדובר במערכת מהצורה:

$$\begin{cases} F_1(u,v,x,y)=0 \\ F_2(u,v,x,y)=0\end{cases}$$

כאשר $\begin{matrix} F_1(u,v,x,y)=u-\ln(x^2+y^2) \\ F_2(u,v,x,y)=v-\arctan\frac{y}{x}\end{matrix}$ בעלות נ"מ רציפות $(x>0)$

משפט הפונקציה הסתומה מבטיח את הדרוש במידה ומתקיים: $\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\equiv\begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y}\end{vmatrix}\neq 0$

תכונות הגרדיאנט. פונקציות סתומות.

$$F'_{1x} = \frac{-2x}{x^2+y^2}, \quad F'_{1y} = -\frac{2y}{x^2+y^2} \quad F'_{2x} = -\frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$F'_{2y} = -\frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{2x}{x^2+y^2}, & -\frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2}{x^2+y^2} \neq 0 \quad \Leftarrow$$

$(x>0)$

<u>תרגיל 6</u>

<u>נתונה מערכת</u>

$$\begin{cases} x-u-\ln v=0 \\ y-v+\ln u=0 \\ w-2u-v=0 \end{cases}$$

להראות שבסביבת של $(x_0,y_0)=(1,1)$ היא מגדירה

$$* \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \\ w=w(x,y) \end{cases}$$

בעלת נ"ר רציפים אשר $u(1,1)=1$, $v(1,1)=1$, $w(1,1)=3$ ולחשב u'_x, v'_x, w'_x ב $(1,1)$

<u>פתרון</u>:

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v,w)=0 \\ F_2(x,y,u,v,w)=0 \\ F_3(x,y,u,v,w)=0 \end{cases}$$

כאשר: $F_1 = x-u-\ln v, \quad F_2 = y-v+\ln u \quad F_3 = w-2u-v$

בעלות נ"ר רציפים! $x_0=1, y_0=1, u_0=1, v_0=1, w_0=3$ הינו פתרון.

<u>מכיוון שיש שלוש משוואות אין מנסים לחלק שלושה משתנים כפונקציות של היתר.</u>

משפט הפונקציה הסתומה מבטיח שקיים לחלק (*) פתרון!

$$\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} F'_{1u} & F'_{1v} & F'_{1w} \\ F'_{2u} & F'_{2v} & F'_{2w} \\ F'_{3u} & F'_{3v} & F'_{3w} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0)} \neq 0$$

ובאמת מקבלים:

$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{v} & 0 \\ \frac{1}{u} & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{u=1 \\ v=1}} = 1+\frac{1}{uv} = 2 \neq 0$$

כדי לחשב $u'_x(1,1),\ v'_x(1,1),\ w'_x(1,1)$

לגזור לפי x את

$$\begin{cases} x-u-\ln v=0 \\ y-v+\ln u=0 \\ w-2u-v=0 \end{cases}$$

כאשר

$u=u(x,y)$
$v=v(x,y)$
$w=w(x,y)$

$$\Leftarrow \begin{cases} 1-u'_x-\dfrac{v'_x}{v}=0 \\ 0-v'_x+\dfrac{u'_x}{u}=0 \\ w'_x-2u'_x-v'_x=0 \end{cases}$$

אז:

$$\begin{pmatrix} -1, & -\frac{1}{v}, & 0 \\ \frac{1}{u}, & -1, & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_x \\ v'_x \\ w'_x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לדוגמה $x=1, y=1$ $u=1, v=1, w=3$ (פתרון הנקבל):

$$u'_x(1,1)=v'_x(1,1)=\frac{1}{2},\quad w'_x(1,1)=3/2$$