מישור משיק, נגזרות חלקיות מסדר גבוה ונגזרת מכוונת של פונק' דיפרנציאבילית.

תיאוריה לתרגיל קודם: תהא: $f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

מוגדרת בסביבה של נקודה: $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$

קיים נגזרות חלקיות בסביבת $\underline{x}^0$ ורציפות ב $\underline{x}^0$

$\Downarrow$ $\not\Uparrow$

דיפרנציאבילות ב $\underline{x}^0$

$\Downarrow$ $\not\Uparrow$

רציפות הפונקציה בנקודה $\underline{x}^0$

$\Downarrow$

נגזרת הפונקציה f בכל כיוון $\hat{n}$ - בנקודה $\underline{x}^0$ וקיים הגיוסתאי:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}} f(\underline{x}^0) = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} f(\underline{x}^0)$$

$\Downarrow$ $\not\Uparrow$

קיים נגזרת מכוונת של f ב $\underline{x}^0$ בכל כיוון $\hat{n}$

$\Downarrow$ $\not\Uparrow$

קיים נגזרות חלקיות ב $\underline{x}^0$

מישור משיק

תרגיל 1

(א) למצוא מישור משיק לפרבולואיד (שנמצא עליו) $(1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ בנקודה $M:(x_0, y_0, z_0)$

(ב) למצוא מישור משיק לכדור: $(2)\ z = 9 - x^2 - y^2$ בנקודה $(1,2,4)$

פתרון

(א) המשטח הוא משטח רמה מהצורה $F(x,y,z) = c$ כאשר $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

בעלת נגזרות חלקיות רציפות

$$F'_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F'_y = \frac{2y}{b^2}, \quad F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

$\Leftarrow$ המישור המשיק דרך $M = (x_0, y_0, z_0)$ הוא מישור דרך M ועם וקטור נורמל

$$\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right)$$

$\Leftarrow$ משוואת המישור היא: $F'_x(M) \cdot (x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2\frac{x_0}{a^2} \cdot x + 2\frac{y_0}{b^2} \cdot y + 2\frac{z_0}{c^2} \cdot z = 2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 2$$

(ב) אפשר להסתכל על המשטח כמשטח רמה $F(x,y,z)=9$ כאשר $F(x,y,z)=z+x^2+y^2$ בעלת נ"מ רציפה $\Leftarrow$ $\overline{\nabla}F(1,2,4)=(2,4,4)$

הוא וקטור נורמל למישור המשיק דרך הנקודה $(1,2,4)$ (שנמצאת על המשטח)

אפשר גם להסתכל על המשטח כגרף של פונקציה:

$z=f(x,y)=9-x^2-y^2$

$f(x,y)$ בעלת נ"מ רציפה והלינאריזציה שלה בנק' (x_0,y_0,z_0) אשר $z_0=f(x_0,y_0)$

הוא:

$$z-z_0=\underbrace{f'_x(x_0,y_0,z_0)}_{-2}\cdot(x-x_0)+\underbrace{f'_y(x_0,y_0,z_0)}_{-4}\cdot(y-y_0)$$

צורת משוואת המישור המשיק (ויש לו אותו וקטור נורמל)

תרגיל 2

תהא $f(x,y,z):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית וגזירה שקיים מספר טבעי $p\in\mathbb{N}$

כך שלכל $\lambda\in\mathbb{R}$ ולכל $(x,y,z)\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$(1)\quad f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^p\cdot f(x,y,z)$$

(פונקציה הומוגנית מסדר p)

להוכיח את הנכונות הבאה (נכונה אוילר): $(2)\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\cdot f$

הוכחה נגזור את (1) לפי λ (את אגף שמאל בעזרת כלל השרשרת):

$$f'_x(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda x)+f'_y(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda y)+f'_z(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda z)=$$

$$=p\cdot\lambda^{p-1}f(x,y,z)$$

כלומר:

$$f'_x(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot x+f'_y(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot y+f'_z(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot z=p\cdot\lambda^{p-1}f(x,y,z)$$

ובפרט עבור $\lambda=1$ נקבל את הנכונות (2).

תרגיל 3

תהא $f(x,y)$ פונקציה מתמלקה C^2 בחצי המישור הימני $(x>0)$

שמקיימת שם את המשוואה: $(1)\quad (x+y)\frac{\partial f}{\partial x}=(x-y)\frac{\partial f}{\partial y}$

נגדיר פונקציה $g(u,v)=f(x,y)$

כאשר $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ $\quad v(x,y)=\arctan y/x$

הביטאו את $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ בעזרת $\frac{\partial g}{\partial v}$, $\frac{\partial g}{\partial u}$

והראו ש: $(2)\quad 2\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial g}{\partial v}=0$

הערה

כדי לבטא את $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ בעזרת $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$ (רשום:

$$f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$$

נגזרת לפי x (תוך שימוש בכלל השרשרת באופן ימין):

$$f'_x(x,y) = g'_u(u,v)\cdot u'_x(x,y) + g'_v(u,v)\cdot v'_x(x,y)$$

נגזרת לפי y:

$$f'_y(x,y) = g'_u(u,v)\cdot u'_y(x,y) + g'_v(u,v)\cdot v'_y(x,y)$$

בנוסף מתקיים (בקל):

$$u'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad u'_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$v'_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad v'_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

ולכן:

$$(*)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(2x\frac{\partial g}{\partial u} - y\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$(**)\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(2y\frac{\partial g}{\partial u} + x\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

שאלה האם מתבר להשתמש בכלל השרשרת כדי לגזור את $g(u(x,y),v(x,y))$

תשובה

הדרישה בכלל השרשרת היא שהפונקציות $u(x,y), v(x,y)$ יהיו בעלות נגזרות חלקיות ב (x_0,y_0) ושהפונקציה $g(u,v)$ תהיה **דיפרנציאבילית** בנקודה

$$(u_0,v_0) = (u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))$$

השאלה כה תסר לנו משפט שיבטיח כאשר בהתאם לרמה שפונקציות $u(x,y), v(x,y)$ מקיימות תנאים שמבטיחים שניתן לרשום:

$$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$$

כאשר $x(u,v), y(u,v) \in C^1$ ומכיוון ש $f \in C^2$ אז $g \in C^1 \Leftarrow$ דיפרנציאבילית

נחזור לתרגיל: נציב את (*) + (**) ב (1) ונקבל:

$$(x+y)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\left(2x\frac{\partial g}{\partial u} - y\frac{\partial g}{\partial v}\right) = (x-y)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\left(2y\frac{\partial g}{\partial u} + x\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2}\left[\frac{\partial g}{\partial u}\left(2x(x+y) - 2y(x-y)\right) + \frac{\partial g}{\partial v}\left(-y(x+y) - x(x-y)\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

תרגיל 4

תרגיל:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(א) להראות ש $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$

ולהסיק שלפחות אחת מבין הפונקציות $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ אינה רציפה ב-$(0,0)$

(ב) האם ניתן להסיק ששתי הפונקציות f''_{yx}, f''_{xy} לא רציפות בהשאר?

פתרון

נחשב את $f'_x(x,y)$

עבור $(x,y)\neq(0,0)$:

$$f'_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

עבור $(x,y)=(0,0)$

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0$$

לסיכום:

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

באופן דומה:

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

כלומר:

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{-y^5}{y^4}-0}{y}=-1$$

ואילו

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^5}{x^2}-0}{x}=1$$

* אין יודעים שאם $f''_{xy}(x,y)$! $f''_{yx}(x,y)$ רציפות ב $(0,0)$

אבל $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$ ולכן לפחות אחת מהן אינה רציפה ב $(0,0)$

ב) אפשר להסיק ששתי הפונקציות $f''_{xy}(x,y)$ $f''_{yx}(x,y)$ אינן רציפות בראשית וזה לפי משפט שוורץ:

$f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0) אשר

(1) הנגזרות החלקיות מסדר ראשון $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ קיימות בסביבה של (x_0,y_0)

(2) הנגזרת המעורבת $f''_{xy}(x,y)$ קיימת בסביבת הנקודה (x_0,y_0)

והיא רציפה ב (x_0,y_0)

אז גם f''_{yx} קיימת ב (x_0,y_0) ושווה ל- f''_{xy} בנק' זו.

תרגיל 5 תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב (x_0,y_0)

א) להראות שקיים כיוון $\hat{n}=(n_1,n_2)$ כך ש $D_{\hat{n}}f(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial \hat{n}}f(x_0,y_0)=0$

ב) מהם הערכים המקסימלי והמינימלי של הנגזרת המכוונת ב (x_0,y_0)?

פתרון

א) $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב (x_0,y_0) $\Leftarrow$ הנגזרת המכוונת בנק' זו בכיוון $\hat{n}$ נתונה ע"י:

$$D_{\hat{n}}f(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial \hat{n}}f(x_0,y_0)=\hat{n}\cdot\vec{\nabla}f(x_0,y_0)$$

כאשר: $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)=\left(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)\right)$

כלומר:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}}f(x_0,y_0)=\underbrace{|\hat{n}|}_{=1}\cdot\underbrace{|\vec{\nabla}f(x_0,y_0)|}_{\text{אורך וקטור}}\cdot\cos\alpha$$

אם נבחר את $\hat{n}$ כך שיהיה אורתוגונלי לגרדיאנט: $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)$

$(\alpha=\pm\frac{\pi}{2})$ אז $\frac{\partial}{\partial \hat{n}}f(x_0,y_0)=0$

ב) כאשר $\hat{n}$ מקבל לגרדיאנט כלומר $\hat{n}=\pm\frac{\vec{\nabla}f(x_0,y_0)}{|\vec{\nabla}f(x_0,y_0)|}$

נקבל ערכים מינימלי ומקסימלי לנגזרת המכוונת:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}}f(x_0,y_0)=\hat{n}\cdot\vec{\nabla}f(x_0,y_0)=\pm|\vec{\nabla}f(x_0,y_0)|$$

תרגיל 5 תהי $f(x,y,z)$ פונקציה דיפרנציאבילית שמקיימת את המשוואה:

$$(1)\quad f(x,y,2x^2+y^2)=3x-5y$$

בנקודה בין שנאצרת המכוונת שלה בנק' $(1,2,6)$ הכיוון $\hat{n}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

היא: $\frac{\partial}{\partial \hat{n}} f(1,2,6)=1$

לחשב: $\bar{\nabla} f(1,2,6)=\ ?$

פתרון

המשוואה (1) נותנת לנו את הערכים של f על המשטח: $z=2x^2+y^2$

ונשים לב שהנקודה $(1,2,6)$ נמצאת על משטח זה.

צריך לחשב $f'_x(1,2,6)=?\ ,\quad f'_y(1,2,6)=?\ ,\quad f'_z(1,2,6)=?$

גזירת (1) לפי x:

$$f'_x(x,y,2x^2+y^2)\cdot 1+f'_z(x,y,2x^2+y^2)\cdot 4x=3$$

והצבת $(1,2,6)$ $\Leftarrow$

$$(*)\quad f'_x(1,2,6)+4f'_z(1,2,6)=3$$

גזירת (1) לפי y:

$$f'_y(x,y,2x^2+y^2)\cdot 1+f'_z(x,y,2x^2+y^2)\cdot 2y=-5$$

והצבת $(1,2,6)$ נקבל:

$$(**)\quad f'_y(1,2,6)+2f'_z(1,2,6)=-5$$

בנוסף:

$$\bar{\nabla} f(1,2,6)\cdot\hat{n}=\frac{\partial}{\partial\hat{n}}f(1,2,6)=1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(***)\quad \frac{1}{3}f'_x(1,2,6)+\frac{2}{3}f'_y(1,2,6)+\frac{2}{3}f'_z(1,2,6)=1$$

$\Leftarrow (***)+(**)+(*)$

$$\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f'_x(1,2,6)\\f'_y(1,2,6)\\f'_z(1,2,6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$$

הגרדיאנט של הפונקציה הוא:

$$\bar{\nabla} f(1,2,6)=\left(f'_x(1,2,6),\ f'_y(1,2,6),\ f'_z(1,2,6)\right)=(1,-9,-1)$$