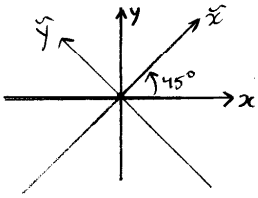
קוי גובה ומשטחי רמה.
חישוב גבולות.

קוי גובה ומשטחי רמה

תרגיל 1 התיעלה שאדם מסוים מפיק מקניה x מיצרים מסוג A ! y מיצרים מסוג B
מתיחס ע"י $u(x,y)=\frac{(x-y)^2-1}{(x+y)^2+1}$. למצוא את מפת קוי האדישות

רמז: הרמז תמיד שבסיבוב מערכת הצירים ב-45° מתקיים: $x-y=-\sqrt{2}\tilde{y}$, $x+y=\sqrt{2}\tilde{x}$

הגדרה קו אדישות הוא אוסף של זוגות סדורים (x,y) שבהם פונקציית העלות מקבלת ערך קבוע – אלו בדיוק קוי הגובה של הפונקציה $u(x,y)$: $\{(x,y)\mid u(x,y)=c\}$



פתרון

נעבור לרמז: בסיבוב מערכת הצירים ב 45° מתקיים הקשר:

$$(x+iy)=cis(45^\circ)\cdot(\tilde{x}+i\tilde{y})=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\cdot(\tilde{x}+i\tilde{y})=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}-\tilde{y})+i\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}+\tilde{y})$$

כלומר
$$\begin{cases}x+y=\sqrt{2}\tilde{x}\\ x-y=-\sqrt{2}\tilde{y}\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}-\tilde{y})\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}+\tilde{y})\end{cases}$$

עלינו לבדוק את קוי הגובה:
$$\frac{(x-y)^2-1}{(x+y)^2+1}=C$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{2\tilde{y}^2-1}{2\tilde{x}^2+1}=C$$
$$\Leftrightarrow$$
$$C\tilde{x}^2-\tilde{y}^2=-\frac{C+1}{2}$$

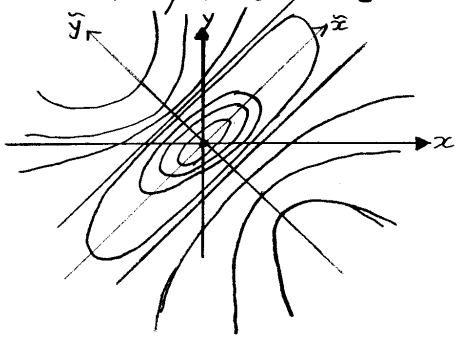
(*) אם $C=-1$ $\Leftarrow$ $-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2=0$ $\Leftarrow$ נקודה בודדת $(0,0)$

(*) אם $C<-1$ נקבל משוואה מהצורה: $-\lambda_1\tilde{x}^2-\tilde{y}^2=+d$ $\Leftarrow$ קבוצה ריקה

(*) אם $-1<C<0$ נקבל משוואה מהצורה: $-\lambda_1\tilde{x}^2-\tilde{y}^2=-d$ $\Leftarrow$ אלפסה

(*) אם $C=0$ נקבל: $\tilde{y}^2=+1/2$ $\Leftarrow$ שני ישרים $\tilde{y}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(*) אם $C>0$ נקבל משוואה מהצורה: $+\lambda_1\tilde{x}^2-\tilde{y}^2=-d$ $\Leftarrow$ הפרבולה ("יצמודה")



קוי גובה ומשטחי רמה.
חישוב גבולות.

תרגיל 2

הטמפרטורה בנקודה (x,y,z) במרחב נתונה ע"י $T(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

(א) למצוא משטחים שווי טמפרטורה

(ב) נתון ישר l עובר דרך הנקודה $M:(1,0,0)$ הטמפרטורה לאורכו קבועה.
למצוא את הזווית בין הישר l למישור xy.

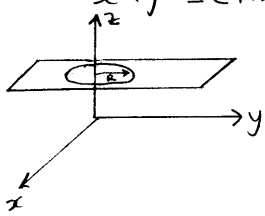
פתרון

(א) המשטחים שווי הטמפרטורה הם משטחי הרמה של הפונקציה $T(x,y,z)$

לומר: $x^2+y^2-z^2=C$ (*)

אלו משטחים היפרבוליים. (צהה אומר ע"י חיתוכים

חיתוך עם מישור $z=h$ (מישור מקביל למישור xy) $\Leftarrow$ $x^2+y^2=C+h^2$



(*) אם $C+h^2=R^2>0$ זה מעגל שמרכזו בראשית והרדיוס R

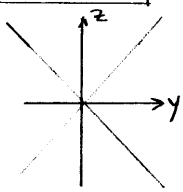
(*) אם $C+h^2=0$ זאת נקודה בודדת $(0,0)$

(*) אם $C+h^2<0$ זאת קבוצה ריקה

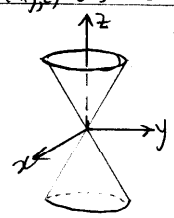
קל לשים לב שמקבלים <u>היפרבולה</u> שמתקבלים מסיבוב עקום במישור yz סביב ציר z
(למשל הגלל שבמערכת <u>קורדינטות גלילית</u> (ρ,θ,z) $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$
המשוואה (*) מקבל צורה: $\rho^2+z^2=C$ ואין תלוי הזווית θ)

חיתוך עם מישור yz $(x=0)$ $\boxed{y^2-z^2=C}$

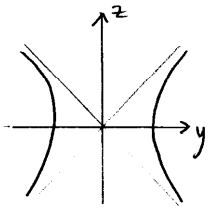
(*) $C=0$ $\Leftarrow$ שני ישרים $z=\pm y$



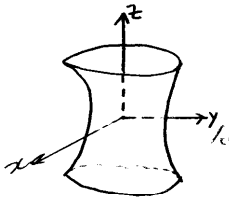
המשטח שווה הטמפרטורה $T(x,y,z)=0$ הוא קונוס



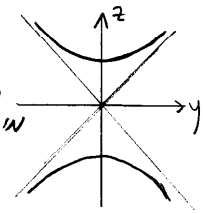
(*) $C<0$ $\Leftarrow$ היפרבולה



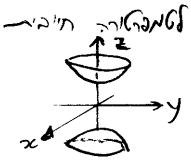
המשטח שווה הטמפרטורה המתאים לטמפרטורה שלילית הוא



(*) $C>0$ ההיפרבולה "בצדדה"



המשטח שווה הטמפרטורה המתאים לטמפרטורה חיובית מורכב משני חלקים נפרדים



קוי גובה ומשטחי רמה.
חישוב גבולות.

(ב) הישר l עובר דרך הנקודה $M:(1,0,0)$ והמפורה לווירטו קבועה ושווה:

$$T(1,0,0)=1$$

כלומר הוא מכל כולו במשטח $x^2+y^2-z^2=1$ (**)

מכיוון שהישר עובר דרך $(1,0,0)$ יש לו פרמטריזציה מהצורה (***) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

נציב את (***) ב (**) ונקבל:

$$(1+ta)^2+t^2b^2-t^2c^2=1$$
$$\Leftrightarrow 1+2ta+t^2a^2+t^2b^2-t^2c^2=1$$
$$\Leftrightarrow t^2(a^2+b^2-c^2)+2at=0$$

כדי שהביטוי לכל $t\in\mathbb{R}$ אומר בפולינום באמצע שמאל הוא פולינום האפס

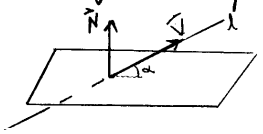
כלומר אומר $a^2+b^2-c^2=0$ וגם $a=0$

יש לנו שני וקטורי כיוון אפשריים לישר l:

$(a,b,c)=(0,1,1)$

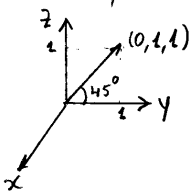
$(a,b,c)=(0,1,-1)$

האופן בו אני מוצא את הזווית בין ישר עם וקטור כיוון $\vec{V}$ לבין מישור עם נורמל $\vec{N}$



עדיף לחשב זווית בין $\vec{V}$ לבין $\vec{N}$

במקרה שלנו קל לראות שהזווית בין הוקטור $(0,1,1)$ לבין מישור xy שווה לזווית בין $(0,1,-1)$ לבין מישור xz והיא בדיוק 45°



<u>תרגיל ב</u>

לפתח דוגמא למשטח ריבועי גלילי שחותך כל כדור שמרכזו על ציר x

<u>פתרון</u>

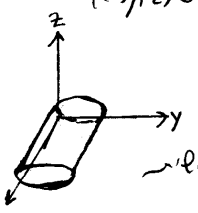
מכיוון שהמשטח צריך לחתוך כל כדור (עם רדיוס קטן ברדיוס) שמרכזו הוא שהוא נקודה על ציר x, הוא חייב <u>להכיל את ציר x</u>

נחפש משטח גלילי (גלילי) מהצורה $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid P(y,z)=0\}$

כדי שהמשטח יהיה <u>ריבועי</u> $P(y,z)$ צריך להיות

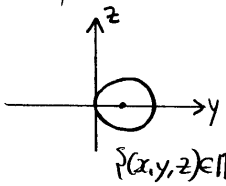
<u>פולינום ממעלה ב</u> בשני משתנים כך שבמישור yz

המשוואה $P(y,z)=0$ מגדירה עקום ריבועי שעובר דרך הראשית



(זה יבטיח שהמשטח יכיל את ציר ה-x)

נתבונן למשל: $(y-1)^2+z^2=1$



$\Leftarrow$ המשטח המבוקש יהיה: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y-1)^2+z^2=1\}$

קוי גובה ומשטחי רמה.
חישוב גבולות.

גבולות

תרגיל 4 לבדוק האם הגבולות הבאים קיימים ולחשב את ערכם

(א)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+3y}{x^2-xy+y^2}$$

ראשית, כדי לדבר על הגבול, צריך להראות שהביטוי $\frac{2x+3y}{x^2-xy+y^2}$ מוגדר בסביבת מוקבת של אפס (אחרת, אפשר לדבר רק על גבול בימס לקבוצה")

צריך להראות שקיימת סביבה נקובה של אפס שבה $x^2-xy+y^2\neq 0$

ובאמת: $x^2-xy+y^2=(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2$ חיובי לכל $(x,y)\neq(0,0)$

נעבור לחישוב הגבול

אם נשאל לראשית לאורך ציר x $(y=0)$ נקבל $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}$

גבול זה לא קיים אפילו במובן הרחב (כי אם $x\to 0^+$ נקבל $+\infty$ ואם $x\to 0^-$, $-\infty$)

מה שמראה שהגבול הנתון לא קיים.

ישמור לב שאם שואפים לראשית לאורך הישר $y=-\frac{2}{3}x$ מקבלים

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x}{(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9})x^2}=0$$

(ב)
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{2x+3y}{x^2+xy+y^2}$$

לדוגמה $0<x,y$ הביטוי מוגדר ומתקיים

$$0<\frac{2x+3y}{x^2+xy+y^2}=2\frac{x}{x^2+xy+y^2}+3\frac{y}{x^2+xy+y^2}\leq \underbrace{2\frac{x}{x^2}+3\frac{y}{y^2}}_{\xrightarrow[y\to\infty]{x\to\infty} 0}$$

מקיימים מבנה

$\Leftarrow$ המסוים של הגבול שווה אפס.

צריך נוסחת הצ לעבור לצורה פולרית: $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

ומקבלים:
$$\lim_{r\to\infty}\frac{2r\cos\theta+3r\sin\theta}{r^2+r^2\sin\theta\cos\theta}=\underbrace{\frac{r}{r^2}}_{\xrightarrow{r\to\infty} 0}\cdot\underbrace{\left(\frac{2\cos\theta+3\sin\theta}{1+\frac{1}{2}\sin 2\theta}\right)}_{\text{ביטוי חסום}}$$

(המכנה $\geq \frac{1}{2}$!!)

ונובע שגם שהגבול הנ"ל אפס.

קוי גובה ומשטחי רמה.
חישוב גבולות.

(ב) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$

אם נשאל לראשונה לאורך הישר $y=kx$ נקבל את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

הגבול הנ"ל תלוי בערך של k ולכן הגבול לא קיים

(ג) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$

אם נקח $y=kx$ נקבל: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{k^2x^6}{x^8+k^4x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{x^4+k^2} = 0$

(אם $k\neq 0$ זה גבול מוגדר $\text{"}\frac{0}{0+k}=0\text{"}$ ואם $k=0$ המונה מתאפס)

זה לא מספיק שהגבול המקורי קיים (גבול אם הגבול המקורי קיים אנו הוא שווה אפס)

אם נקח: $y=kx^2$ נקבל: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{k^2x^8}{x^8+k^4x^8} = \frac{k^2}{1+k^4}$

הגבול הנ"ל תלוי ב k $\Leftarrow$ הגבול המקורי לא קיים

דרך אחרת (גם $u=x^4$, $v=y^2$ ונקבל את הגבול $\lim\limits_{\substack{u\to 0^+\\ v\to 0^+}} \frac{uv}{u^2+v^2}$

ובמעלה ג' ראינו שגבול זה לא קיים.

(ה) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+\sin^2 y}$

נניח $y=kx$ נקבל: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+\sin^2 kx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{k}{1+\underbrace{\left(\frac{\sin kx}{x}\right)^2}_{\xrightarrow{x\to 0}\ k}} = \frac{k}{1+k^2}$

הגבול האחרון תלוי ב k $\Leftarrow$ הגבול המקורי לא קיים.

(ו) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$

אם נניח $y=kx$ נקבל $\lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2k}{k^2+x^2} = 0$

אם אם נניח $y=kx^2$ נקבל אפס

עכשיו שהגבול שווה אפס:

לכל $(x,y)\neq(0,0)$

$$0 \leq \left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = \frac{|x|^3\cdot|y|}{x^4+y^2}$$

קוי גובה ומשטחי רמה.
חישוב גבולות.

נזכר באי שוויון הממוצעים $\forall a,b \geq 0 : \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$\Leftarrow \quad 2\sqrt{x^4y^2} \leq x^4+y^2$ ולכן:

$$0 \leq \left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right| = \frac{|x|^3\cdot|y|}{x^4+y^2} \underset{\text{מקיימים מכנה}}{\leq} \frac{|x|^3\cdot|y|^2}{2\sqrt{x^4y^2}} = \underbrace{\frac{1}{2}|x|\cdot|y|}_{\xrightarrow[y\to 0]{x\to 0} 0}$$

ולכן לפי סנדוויץ' הגבול המקורי שווה אפס.

תרגיל 5 לחשב את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^6+y^6}$

פתרון נעבור להצגה פולרית

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{e^{-1/r^2}}{r^6(\cos^6\theta+\sin^6\theta)}$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{e^{-1/r^2}}{r^6} \underset{t=\frac{1}{r^2}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}}{1/t^3} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^3}{e^t} = 0$$

אם נראה שהביטוי $\frac{1}{\cos^6\theta+\sin^6\theta}$ חסום יבטיח שהגבול $= 0$

נציב $t=\cos^2\theta \Leftarrow 0\leq t\leq 1 \quad , \sin^6\theta = (1-t)^3$

נקבל את הביטוי $\frac{1}{t^3+(1-t)^3} \quad 0\leq t\leq 1$

נמצא מינימום של $f(t)=t^3+(1-t)^3$ בקטע $[0,1]$:

$f'(t)=3t^2-3(1-t)^2=6t-3 \Leftarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1/2$

$f''(t)=6>0 \Leftarrow t=1/2$ נקודת מינימום של $f(t)$

$f(\frac{1}{2})=1/4 \Leftarrow$ לכל θ מתקיים: $0 \underset{\text{המכנה חיובי}}{\leq} \frac{1}{\cos^6\theta+\sin^6\theta} \leq 4$

ומסה"כ מקבלים שהגבול המקורי $= 0$

תרגיל 6

לחשב את הגבול $\lim\limits_{\substack{x_1\to 1\\ x_2\to 2\\ \vdots\\ x_n\to n}} \frac{(x_1-1)(x_2-2)\cdot\ldots\cdot(x_n-n)}{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+\ldots+(x_n-n)^2}$

קוי גובה ומשטחי רמה.
חישוב גבולות.

פתרון נב"ג:

$y_1=x_1-1,\quad y_2=x_2-2,\quad \dots,\quad y_n=x_n-n$

נקבל את הגבול:

$$\lim_{\substack{y_1\to 0\\ y_2\to 0\\ \vdots\\ y_n\to 0}} \frac{y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n}{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}$$

(*) אם $n=1$ $\quad \lim_{y_1\to 0}\frac{y_1}{y_1^2}=\lim_{y_1\to 0}\frac{1}{y_1}$ לא קיים (גם לא במ"ן הרחב)

(*) אם $n=2$ $\quad \lim_{\substack{y_1\to 0\\ y_2\to 0}}\frac{y_1\cdot y_2}{y_1^2+y_2^2}$ ראינו (שלב 4 ב') שהוא לא קיים

(*) אם $3\le n$ נעזר בכך שעבור $\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

מתקיים $|\vec{y}|^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$

ובנוסף כל רכיב y_k מקיים: $|y_k|\le|\vec{y}|$

ונקבל ש:

$$0\le\left|\frac{y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n}{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}\right|\le\frac{|\vec{y}|^n}{|\vec{y}|^2}=|\vec{y}|^{n-2}$$

$n-2\ge 1$ ובנוסף $|\vec{y}|\longrightarrow 0$ (למה?) ולכן: הגבול שווה אפס.

תרגיל 7

לחשב את הגבול

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}}(1+xyz)^{(x^2+y^2+z^2)^{-1}}$$

פתרון

$$(1-R^3)\le(1-|x|\cdot|y|\cdot|z|)\le(1+xyz)\le(1+|x|\cdot|y|\cdot|z|)\le(1+R^3)$$

עבור x,y,z בסביבה מספיק קרובה של $(0,0,0)$ הכל חיובי, ואפשר להעלות בחזקת $\frac{1}{R^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ ולקבל:

$$(1-R^3)^{1/R^2}\le(1+xyz)^{(x^2+y^2+z^2)^{-1}}\le(1+R^3)^{1/R^2}$$

$$(1-R^3)^{1/R^2}=\left[(1-R^3)^{\frac{1}{R^3}}\right]^R\xrightarrow{R\to 0^+}\left(\frac{1}{e}\right)^0=1$$

$$(1+R^3)^{1/R^2}=\left[(1+R^3)^{\frac{1}{R^3}}\right]^R\xrightarrow{R\to 0^+}e^0=1$$

ולכן לפי סנדוויץ' הגבול הנתון שווה 1.