קומבינטוריקה ואלגברה:

חלוקת k כדורים זהים ל n תאים שונים $\binom{n+k-1}{k}$

n עצמים מ k סוגים. q_i עצמים מהסוג ה i. מספר התמורות הוא: $\frac{n!}{q_1!\cdot q_2!\cdot\ldots\cdot q_k!}$

בחירת k מתוך nאלמנטים	עם חשיבות לסדר	בלי חשיבות לסדר
עם החזרות	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
בלי החזרות	$\binom{n}{k}\cdot k!$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

סכום סדרה הנדסית $\frac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$

סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת טורים נפוצים: $\frac{a_1}{1-q}$

$$\sum_{x=1}^{n} X=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\sum_{x=1}^{n} X^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

הסתברות כללית מאורעות בדידים:

כלל ההכלה וההפרדה: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ובמקרה כללי:

$$P(A1\cup A2\cup\ldots An)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)+(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\cap A_3\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנית: ההסתברות ש A יקרה בהנתן ש B קרה: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

עבור A,B בת"ל: $P(A|B)=P(A|B^c)=P(A)$

כלל הכפל: $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$

ועבור n מאורעות:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A3|A_1\cap A_2)\ldots\cdot P(An|A_1\cap A_2\cap\ldots A_{n-1})$$

כלל ההסתברות השלמה: $B_1,B_2,B_3\ldots B_n$ חלוקה של המרחב Ω. כלומר זרים וסכומם הוא Ω. אזי: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i)$

כלל Bayes: באותם תנאים של ההסתברות השלמה, בתוספת המגבלה ש: $P(A)>0$ מתקיים: $P(B_j|A)=\frac{P(A|B_j)\cdot P(B_j)}{P(A)}=\frac{P(A|B_j)\cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$

התפלגות משותפת של מ"מ בדידים:

$P(X=x,Y=y)=P(X=x\cap Y=y)$

התפלגויות שוליות:

$P_X(x)=\sum_y P_{XY}(x,y)$ $\quad P_Y(y)=\sum_x P_{XY}(x,y)$

הסתברות מותנית משותפת:

$P_{Y|X}(y|x)=P(Y=y|X=x)=\frac{P(Y=y\cap X=x)}{P(X=x)}$

נוסחת ההסתברות השלמה

$P_X(x)=\sum_y P(X=x|Y=y)\cdot P(Y=y)$

תוחלת מ"מ בדיד:

הגדרה: $E(X)=\sum_x x\cdot P(X=x)$

נוסחת הזנב: עבור מ"מ המקבל ערכים שלמים אי שליליים: $E(X)=\sum_x P(X\geq x)$

תכונות של תוחלת

1) כלל הסכום: $E(X_1+X_2+\ldots X_n)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$

2) כלל הכפל: עבור X,Y בת"ל E(XY)=E(X)E(Y)

3) אם מ"מ X מקבל ערכים בין a ל-b אזי $a\leq E(X)\leq b$

4) לינאריות: E(aX+b)=aE(X)+b

5) תוחלת של פונקציה של מ"מ: $E(g(x))=\sum_x g(x)\cdot P(X=x)$

התפלגות היפר-גאומטרית: X~HG(N,D,n)

N כדורים מתוכם D שחורים והשאר לבנים. מוציאים n כדורים באקראי. X מ"מ הסופר את מספר הכדורים השחורים מבין הכדורים שהוצאו.

$$P_X(x)=\begin{cases}\frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x=0,1,\ldots\min(D,n)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

קירוב בינומי להתפלגות היפרגאומטרית:

אם N,D,N-D>>n אזי בקירוב X~Bin(n,D/N)

אי תלות:

המאורעות A,B בת"ל אמ"מ: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

המאורעות A1,A2,...An בת"ל אמ"מ כל זוג, שלשה, ... n-יה מקיימים:

$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)\cdot P(A_j)$

$P(A_i\cap A_j\cap A_k)=P(A_i)\cdot P(A_j)\cdot P(A_k)$

$\vdots$

$P(A_1\cap A_2\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots\cdot P(A_n)$

אמינות מערכת:

a - ההסתברות שהמערכת תעבוד

P_i - ההסתברות שרכיב i יעבוד

טורי: $a=(P_1P_2P_3\ldots P_n)$

מקבילי:

$a=1-((1-P_1)\cdot(1-P_2)\cdot\ldots\cdot(1-P_n))$

תחרות בין מ"מים פואסוניים:

$X\sim Pois(\lambda_x)$, $Y\sim Pois(\lambda_y)$ אזי: $P(y<x)=\frac{\lambda_y}{\lambda_x+\lambda_y}$

אינדיקטורים:

תוחלת של I_A: $E(I_A)=P(A)$

אם X סופר כמה מאורעות קרו $X=\sum I_A$ אזי $E(X)=E(\sum I_A)=\sum P(Ai)$

Y,X מ"מ בדידים

$E(Y|X=x)=\sum_y y\cdot P(Y=y|X=x)$

נוסחת תוחלת שלמה:

$E(Y)=\sum_x E(Y|X=x)\cdot P(X=x)$

הערות: E(X|X)=X

אם X,Y ב"ת: E(X|Y)=E(X) ולהיפך.

נוסחת ההחלקה: נגדיר פונק' מיקרית E(Y|X)=g(X)

אז E(Y)=E(E(Y|X))=E(g(X))

נוסחאות נוספות: E(X+Y|Y=y)=E(X|Y=y)+y

E(X+Y|Y)=E(X|Y)+Y

E(XY|Y=y)=yE(X|Y=y)

E(XY|Y)=YE(X|Y)

משפט Wald:

יהי X_i סידרת מ"מ ב"ת ש"ה עם $E(X_i)=\mu$

יהי N מ"מ המקבל ערכים טבעיים. N ו-X בלתי תלויים.

נגדיר $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$ אזי: $E(S_N)=\mu E(N)$

שונות משותפת

שונות משותפת מצביעה על תיאום בין מ"מ:

1) Cov(X,Y)>0: בהינתן ערך X הגבוה מ E(X) נצפה שגם E(Y) יהיה גבוה.

2) Cov(X,Y)<0: בהינתן ערך X הנמוך מ E(X) נצפה ש E(Y) יהיה גבוה.

3) Cov(X,Y)=0: X, Y בלתי מתואמים.

בלתי תלויים <= בלתי מתואמים (לא בהכרח לכיוון שני)

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))]$

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

$Corr(X,Y)=\rho_{(x,y)}=\frac{Cov(X,Y)}{SD(X)\cdot SD(Y)}$

תכונות של השונות המשותפת:

1. Cov(X,Y)=Var(X)
2. Cov(X,Y)=Cov(Y, X)
3. Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y)
4. Cov(X,Y+Z)=Cov(X,Y)+Cov(X,Z)
5. Cov(X,const)=0

שונות (מדד פיזור):

הגדרת שונות של מ"מ X: $Var(X)=E[(X-E(X))^2]$

הנוסחה השימושית לחישוב שונות: $Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$

סטית תקן של מ"מ X: $SD(X)=\sqrt{Var(X)}$

היחידות של סטית התקן הן היחידות של X.

תכונות של שונות:

1. לכל X Var(X)>0
2. Var(X)=0 אם ורק אם X הוא מ"מ קבוע.
3. יהי X מ"מ המקיים: Var(X) סופי, אזי לכל a ו-b: $Var(aX+b)=a^2Var(X)$
4. SD(aX+b)=|a|SD(X)
5. Var(X,Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)
6. עבור $X_1\ldots X_n$ ב"ת: $Var(aX_i)=aVar(X_i)$

מומנטים ופונקציה יוצרת מומנטים:

הגדרה: יהיה X מ"מ. פי"מ של X מוגדרת: $M_x(t)=E(e^{tx})$

ולכן: $M_x(t)=E(e^{tx})=\sum_x e^{tx}P(X=x)$

עבור מ"מ רציף: $M_x(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f_X(x)dx$

ל- $E(X^n)$ קוראים המומנט הnי של מ"מ X.

פי"מ של סכום מ"מ ב"ת:

יהיו Y,X מ"מ ב"ת אזי $M_{X+Y}(t)=M_x(t)\cdot M_Y(t)$

נוסחה נוספת: יהי X מ"מ. a ו-b קבועים, אזי

$M_{aX+b}(t)=e^{bt}M_x(at)$

משפט: קיימת התאמה חח"ע בין מ"מ לפי"מ שלו. ז"א פי"מ מגדירה את ההתפלגות באופן חד משמעי. ז"א למ"מ שווי התפלגות יש אותה פי"מ.

תוחלת משותפת:

נתונים מ"מ X,Y והתפלגותם המשותפת $P_{XY}=(x,y)$

לכל פונקציה f(X,Y) מתקיים

$E(f(X,Y))=\sum_{x,y}f(x,y)P_{XY}(x,y)$

בפרט מתקיים

$E(XY)=\sum_{x,y}xy\cdot P_{XY}(x,y)$

X, Y ב"ת => E(XY)=E(X)E(Y) אך לא להיפך.

תוחלת מותנית:

X מ"מ בדיד

$E(X)=\sum_x xP(X=x)$

הגדרה: יהי A מאורע עם הסתברות חיובית אזי:

$E(X|A)=\sum_x xP(X=x|A)$

אי שוויון מרקוב:

לכל מ"מ X אי שלילי, לכל a<0 מתקיים $P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}$

אי שוויון צ'בישב:

לכל מ"מ X ולכל k<0: $P(|X-E(X)|\geq SD(X)\cdot k)\leq\frac{1}{K^2}$

או בצורה אחרת: $P(|X-E(X)|\geq c)\leq\frac{VAR(X)}{c^2}$

כך ניתן לקבל חסם להסתברות ללא ידע מלא על ההתפלגות.

תכונות של מקדם מתאם:

1. $-1\leq Corr(X,Y)\leq 1$
2. Corr(X,Y)=0 <=> Cov(X,Y)=0
3. Corr(aX+b,cY+d)=(sign(ac))*Corr(X,Y)
4. Corr(X,X)=1
5. Corr(X,Y)= 1 <=> Y=aX+b, a>0

Corr(X,Y)= -1 <=> Y=aX+b, a<0

התפלגות נורמלית: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

סימון: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

שזה: $X\sim N(E(x),Var(x))$

פונקציית צפיפות: $f_x(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

נרמול משתנה נורמלי:

$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow Z\equiv\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$P(a\leq x\leq b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$P(x\leq b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

$\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

$P(a\leq Z\leq b)=\Phi(b)-\Phi(a)$

$P(-a\leq Z\leq a)=2\Phi(a)-1$

משפט הגבול המרכזי:

יהיו X1,X2,...Xn משתנים מקריים בת"ל ש"ה עם תוחלת μ ושונות σ^2

נגדיר $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ אזי בקירוב $\bar{X}n\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

נגדיר $Sn=\sum_{i=1}^{n}X_i$ אזי בקירוב $Sn\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

מ"מ רציפים:

הגדרות הסתברויות

$P(X\in[a,a+dx])=f_x(x)\cdot dx$

אילוצים: $\forall x: f_x\geq 0$

$P(-\infty\leq X\leq\infty)=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)dx=1$

$P(X\in[a,b])=P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f_x(x)dx$

$P(X\leq a)=\int_{-\infty}^{a}f_x dx$

$P(a\leq X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)$

הערות:

א. f_x לא נותנת הסתברות - לכן יתכן כי $f_x(x)>1$

ב. אין משמעות לחזור אי השוויון כי ההסתברות בכל נקודה ספציפית היא 0.

פונקציית התפלגות מצטברת:

עבור מ"מ רציף:

$F_x(x)=\int_{-\infty}^{x}f_x(t)dt$ $\quad f_X(x)=\frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$

$P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)$

קירוב פואסוני להתפלגות בינומית:

אם $X\sim Bin(n,p)$ ו np<5 אזי בקירוב $X\sim Pois(np)$

קירוב נורמלי להתפלגות בינומית:

אם $X\sim Bin(n,p)$ ו np>5 ו nq>5 אזי בקירוב $X\sim N(np,npq)$

התפלגות אחידה: X~U([a,b])

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

X מ"מ המציין נקודה שנבחרה באקראי בקטע [a,b]

$E(X)=\frac{a+b}{2}$

$Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

$P(c\leq X\leq d)=\frac{d-c}{b-a}$

התפלגות מעריכית: X~Exp(λ)

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$E(X)=\frac{1}{\lambda}$ $\quad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$P(X>a)=e^{-\lambda a}$

תכונת חוסר הזיכרון:

$P(X>t+s|X>t)=P(X>s)=e^{-\lambda s}$

מינימום של סדרת מ"מ מעריכיים:

$X_1,X_2,\ldots X_k\sim Exp(\lambda)$

$Z=\min(X_1,X_2,\ldots X_k)$

$Z\sim Exp(k\cdot\lambda)$

תוחלת של מ"מ רציף:

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx$

$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot f_X(x)dx$

נוסחת הזנב למ"מ רציף אי שלילי:

$E(X)=\int_0^{\infty}(1-F_X(x))dx$

תוחלת קיימת רק כאשר: $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f_X(x)|dx<\infty$

כל תכונות התוחלת של מ"מ בדיד מתקיימות למ"מ רציף.

שונות:

Var(X)=E(X²)-E²(X)

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f_X(x)dx$

תוחלת מותנית במקרה הרציף:

$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}X\cdot f_{X|Y}(x|y)dx$

הערה: $E(X|Y=y)=g(y)\Rightarrow E(X|Y)=g(Y)$

משפט ההחלקה: $E(X)=E(E(X|Y))=\int_{-\infty}^{\infty}E(X|Y=y)\cdot f_Y(y)dy$

Alfonso & Bonepachio © 2002
Toilets Silicone & Mops

התפלגות משותפת רציפה של זוג מ"מים:

הגדרה: $P\big((X,Y)\in B\big)=\int_B f_{x,y}(t,s)dtds$

ומתקיים: $P\big(x\le X\le x+dx, y\le Y\le dy\big)=f_{XY}(x,y)dxdy$

התפלגות מצטברת משותפת:

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(u,v)dudv$$

ומתקיים: $f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\big[F_{X,Y}(x,y)\big]$

פונקציות צפיפות שוליות: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dx$

קונבולוציה

יהי X,Y מ"מ ויהי Z=X+Y.

עבור מ"מ רציפים :

אם X,Y ב"ת אזי $f_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

אם X,Y תלויים $f_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,z-x)dx$

עבור מ"מ בדידים :

אם Y,X ב"ת אזי $P(Z=z)=\sum_X P_X(x)\cdot P_Y(z-x)$

אם Y,X תלויים אזי $P(Z=z)=\sum_X P_{XY}(x,z-x)$

טרנספורמציה חח"ע של מ"מ רציף:

תהיה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ועולה (יורדת) ב [a,b]. אזי למ"מ Y המוגדר Y=g(X) יש את פונ' הצפיפות:

$$f_Y(y)=\begin{cases} fx\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{1}{g`\left(g^{-1}(y)\right)}\right| & : g(a)\le y\le g(b)\\ 0 & : Otherwise\end{cases}$$

הערה: ניתן במקום: $\left|\frac{1}{g`\left(g^{-1}(y)\right)}\right|$

לרשום: $\left|\frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y}\right|$

טרנספורמציה לא חח"ע:

יהיה X מ"מ לא רציף המקבל ערכים בקטע [a,b]. תהיה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב [a,b] (לא בהכרח חח"ע) המקיימת שלכל y קיים מספר בדיד או בן מניה של x-ים ב [a,b] שעבורם g(x)=y.

אזי למ"מ Y המוגדר להיות Y=g(x) יש פונ' צפיפות:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum_{\substack{x:a\le x\le b\\ g(x)=y}} f_X(x)\cdot\left|\frac{1}{g'(x)}\right| & : \min_{[a,b]}\big(g(x)\big)\le y\le \max_{[a,b]}\big(g(x)\big)\\ 0 & : otherwise\end{cases}$$

התפלגות אחידה דו מימדית:

אם (X,Y)~Unif(B): $f_{X,Y}(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{Area(B)} & :(t,s)\in B\\ 0 & : otherwise\end{cases}$

עבור A⊆B מתקיים: $P\{(X,Y)\in A\}=\frac{Area(A)}{Area(B)}$

הערה: אם X~U[a,b] ו- Y~U[c,d]

וגם X,Y בת"ל אז (X,Y) מתפלגים במשותף

אחיד על המלבן a≤X≤b, c≤Y≤d

אי תלות בין שני מ"מ רציפים:

X,Y בת"ל אמ"מ $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$

כלל: $F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

אם ניתן להפריד את $f_{X,Y}(x,y)$ למכפלת 2 פונקציות $f_{X,Y}(x,y)=g(x)\cdot h(y)$ ותחומיהם השוליים של X ו Y אינם תלויים אחד בשני אזי X ו-Y בת"ל ו g(x) ו- h(y) הן פונ' הצפיפות של X,Y **עד כדי קבוע**.

פונקציית צפיפות מותנית:

$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

כלל הכפל: $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)$

התפלגות מצטברת מותנית: $F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(t|y)dt$

חישוב הסתברות מותנית: $P(a\le X\le b|Y=y)=\int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx$

צפיפות שולית דרך מותנית: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)dy$

נוסחת בייס: $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)}{f_X(x)}$

טרנספורמציה דו מימדית

יהי (x,y) מ"מ דו-מימדי רציף בעל צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y)$.
תהיינה $v=g_2(x,y)$, $u=g_1(x,y)$ פונקציות על המישור, חח"ע וגזירות, כך שקיימות הפונקציות ההפוכות $x=h_1(u,v)$, $y=h_2(u,v)$ גזירות.

נגדיר $D(u,v)=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v}\\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v}\end{bmatrix}$

אזי פונקצית הצפיפות המשותפת של $u=g_1(x,y)$ $v=g_2(x,y)$
נתונה ע"י $f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(h_1(u,v),h_2(u,v))\cdot|D(u,v)|$

הערות :

1. עבור מ"מ $u=g_1(X,Y)$ ניתן לכתוב V=X או V=Y ולבצע טרנספורמציה דו-מימדית עבור U,V ולמצוא צפיפות שולית של U ע"י אינטגרציה.
2. קונבולוציה היא מקרה פרטי של טרנספורמציה דו-מימדית :

U=X+Y V=X (or V=Y)