תורת ההפרעות הב"ת בזמן - מצב מנוון

$$\hat H = \hat H_0 + \hat H'$$

ל $\hat H_0$ פונקציות עצמיות מנוונות.

ההפרעה $\hat H'$ בד"כ תסיר את הניוון.

הפתרון למצב הלא מנוון: $\qquad \varphi_n^{(1)} = \sum_i c_{ni}\varphi_i^{(0)}$

לא ישים במצב המנוון מכיון $\qquad c_{ni} = \dfrac{H'_{in}}{E_n^{(0)}-E_i^{(0)}}$

ש c_{ni} מתבדר $(E_1^{(0)}=E_2^{(0)}=\dots)$

כיצד נמצא את התיקון ל φ_n ול E_n ?

נניח ש $\{\varphi_n^{(0)}\}$ עבור $1\le n\le q$ הנו מנוון,

נבנה בסיס חדש מ $\{\varphi_n^{(0)}\}$ שלגביו את H'_{in} ← $H'_{in}=\delta_{in}$

ובבסיס זה כל ה c_{ni} הסינגולריים יעלמו.

לכסון המטריצה H'_{in}

$\bar\varphi_n = \sum_{i=1}^{q} a_{ni}\varphi_i^{(0)}$ - הבסיס בו H'_{in} מלוכסן, עבור $i,n\le q$

$$\longrightarrow \langle\bar\varphi_n|\hat H'|\bar\varphi_p\rangle = H'_{np}\,\delta_{np} \qquad n,p\le q$$

הבסיס המלא = תת בסיס $\bar\varphi_n$ עבור $n\le q$ + הבסיס הלא מנוון φ_n, עבור $n>q$

$$\hat H' = \left(\begin{array}{ccc|c} H'_{11} & & 0 & H'_{1,q+1} \cdots \\ 0 & H'_{22} & & H'_{2,q+1} \\ & & \ddots & \\ \hline H'_{q+1,1} & \cdots & & \\ & & & \end{array}\right)$$

באופן כללי מתקיים $\qquad \hat H\varphi_n = E_n\varphi_n$

עבור $n\le q$ נציב $\qquad \varphi_n = \bar\varphi_n \,,\; E_n = E_n^{(0)}+E_n'$

ונקבל $\qquad (\hat H_0+\hat H')\bar\varphi_n = (E_n^{(0)}+E_n')\bar\varphi_n \to \underline{\hat H'\bar\varphi_n = E_n'\bar\varphi_n}$

כאשר השתמשנו בצורה ?

$$\hat{H}_0 \varphi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \varphi_n^{(0)} \longrightarrow \hat{H}_0 \bar{\varphi}_n = E_n^{(0)} \bar{\varphi}_n$$

מכיון שהבסיס $\bar{\varphi}_n$ הוא אורתונורמלי, נקבל

$$\underline{H'_{nn} = E'_n}$$

איברי האלכסון במטריצה H'_{np} הם התיקון מסדר ראשון לאנרגיה עבור הפונקציות העצמיות עם $n \le q$.

<u>מהן הפונקציות $\bar{\varphi}_n$</u>?

נציב את $|\bar{\varphi}_n\rangle = \sum_{i=1}^{q} a_{ni} |\varphi_i^{(0)}\rangle$

במשוואת שרדינגר ל $\hat{H}'$ $\quad \hat{H}' |\bar{\varphi}_n\rangle = E'_n |\bar{\varphi}_n\rangle$

ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{q} a_{ni} \hat{H}' |\varphi_i^{(0)}\rangle = E'_n \sum_{i=1}^{q} a_{ni} |\varphi_i^{(0)}\rangle$$

נכפול משמאל ב $\langle \varphi_p^{(0)}|$

ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{q} a_{ni} \hat{H}'_{pi} = E'_n a_{np}$$

או

$$\sum_{i=1}^{q} (H'_{pi} - E'_n \delta_{pi}) a_{ni} = 0$$

ובצורה מפורשת עבור $n=1$

$$\begin{pmatrix} H'_{11}-E'_1 & H'_{12} & H'_{13} \cdots & H'_{1q} \\ H'_{21} & H'_{22}-E'_1 & H'_{23} \cdots & H'_{2q} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ H'_{q1} & \cdots & \cdots & H'_{qq}-E'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1q} \end{pmatrix} = 0$$

כלומר המשוואה $H'|\bar{\varphi}_n\rangle = E'_n|\bar{\varphi}_n\rangle$ בכתיב מטריצי בבסיס $|\varphi_i^{(0)}\rangle$ (שבו H' לא אלכסוני)

עבור כל $1 \le n \le q$ נציב את E'_n במטריצה לעיל ונקבל פתרון לכל המקדמים $\{a_{ni}\}$, כלומר נמצא את $|\bar{\varphi}_n\rangle$.
כל הערכים $\{E'_n\}$ מתקבלים מהדרישה להתאפסות הדטרמיננטה של המטריצה לעיל.

Co הפונקציות בעזרתן נפתור בתורת ההפרעות

$$\varphi_n = \bar{\varphi}_n + \lambda \bar{\varphi}_n^{(1)} + \lambda^2 \bar{\varphi}_n^{(2)} + \dots \qquad n \le q$$

$$\varphi_n = \varphi_n^{(0)} + \lambda \varphi_n^{(1)} + \lambda^2 \varphi_n^{(2)} + \dots \qquad n > q$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n'^{(1)} + \lambda^2 E_n'^{(2)} + \dots \qquad n \le q$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \qquad n > q$$

עבור פס זה ניתן להשתמש בתורת ההפרעות למקרה הלא מנוון.

בחישובים מופיעים הסכומים $\sum_{i\neq n} \frac{H'_{in}}{E_n^{(0)}-E_i^{(0)}} \varphi_i^{(0)}$

אבל למרות ש $E_n^{(0)}=E_i^{(0)}$

עבור $n,i \le q$, אבל נקבל התבדרות מכיוון ש $\underset{i\neq n}{H'_{in}}=0$.

התרומה ל Σ תבוא רק מ $n,i>q$.

דוגמא: מתנד הרמוני דו-מימדי

ההמילטוניאן של מתנד הרמוני דו-מימדי נתון ע"י

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{k}{2}(x^2+y^2)$$

ע"י הפרדת משתנים נקבל 2 משוואות חד מימדיות ב"ת,

לכן הפתרון הוא $\varphi_{np}(x,y)=\varphi_n(x)\cdot\varphi_p(y)$ פתרונות למתנד הרמוני חד-מימדי.

$$E_{np} = \hbar\omega_0(n+p+1)$$

← לכל המצבים בהם $n+p=$קבוע יש אותה אנרגיה, סה"כ $n+p+1$ פונקציות שונות = ניוון מסדר $n+p+1$.

נניח הפרעה מהצורה $\hat H' = k'\hat x\hat y$

כיצד תשפיע ההפרעה על רמות האנרגיה?

נבדוק עבור הרמה המעוררת הראשונה $n+p=1$

בה יש לנו ניוון כפול

$|\varphi_1\rangle=\varphi_{10}$, $\varphi_{01}=|\varphi_2\rangle$

$$E_{np}=E_{10}=E_{01}=2\hbar\omega_0$$

נמצא מהם הפ"ע החדשים $\bar\varphi_1,\bar\varphi_2$ שמלכסנים את $\hat H'$.

כלומר נמצא את המקדמים a, b, a', b'

$$\bar\varphi_1=a\varphi_{10}+b\varphi_{01}$$
$$\bar\varphi_2=a'\varphi_{10}+b'\varphi_{01}$$

נסמן ב $|np\rangle$ את φ_{np}. המטריצה של $\hat H'$ בתחום הניוון היא

$$\hat H' = k'\begin{pmatrix} \langle 10|xy|10\rangle & \langle 10|xy|01\rangle \\ \langle 01|xy|10\rangle & \langle 01|xy|01\rangle \end{pmatrix}$$

נעזר באופרטורי היצירה וההריסה לחישוב $\langle xy\rangle$

$$\hat x=\frac{1}{\sqrt2\beta}(\hat a+\hat a^+)\ ,\quad \hat y=\frac{1}{\sqrt2\beta}(\hat b+\hat b^+)\ ,\quad \beta=\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$$

לפי [illegible]

$$\rightarrow\quad \langle 10|\hat x\hat y|01\rangle=\frac{1}{2\beta^2}\langle 10|\hat a\hat b+\hat a^+\hat b+\hat a\hat b^+ +\hat a^+\hat b^+|01\rangle$$
$$=\frac{1}{2\beta^2}\langle 10|\hat a^+\hat b|01\rangle=\frac{1}{2\beta^2}$$

$$\rightarrow\quad \hat H' = E\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad E=\frac{k'}{2\beta^2}$$

מהו התיקון לאנרגיה E'?

נפתור

$$\det(\hat H'-E'I)=\det\begin{vmatrix} -E' & E\\ E & -E'\end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow E'=\pm E=\pm\frac{k'}{2\beta^2}\qquad E_+=2\hbar\omega_0+\frac{k'}{2\beta^2}\qquad \varphi_+=\bar\varphi_1=\frac{1}{\sqrt2}(\varphi_{10}+\varphi_{01})$$

$2\hbar\omega_0$ $\pm k'/2\beta^2$

$$E_-=2\hbar\omega_0-\frac{k'}{2\beta^2}\qquad \varphi_-=\bar\varphi_2=\frac{1}{\sqrt2}(\varphi_{10}-\varphi_{01})$$

אפקט שטרק (stark)

אטום בשדה חשמלי.

מה תהיה ההשפעה על רמות האנרגיה?

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{r}$$

שדה חשמלי חיצוני

$$\hat{H}' = -e\mathcal{E}z = -e\mathcal{E}r\cos\theta \leftarrow$$

אנרגית האינטראקציה בין מטען לשדה חיצוני בכיוון z.

נבדוק עבור הרמה $n=2$

$n^2=4$ - פונקציות שונות בעלות האנרגיה $n=2$

$$|n\ell m\rangle = |200\rangle, |211\rangle, |210\rangle, |21-1\rangle$$

$$\varphi_{200} = \frac{2}{(2a_0)^{3/2}}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}Y_0^0 \qquad \varphi_{21\substack{0\\ \pm1}} = \frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}\cdot Y_1^{0,\pm1}$$

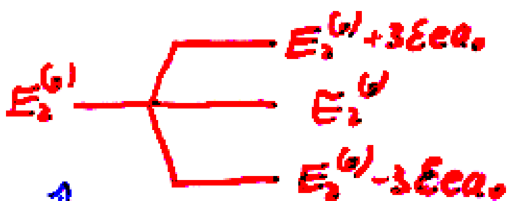
$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}, \quad Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

כל איברי המטריצה של $\hat{H}'$ יתאפסו, פרט ל

$$\langle 210|\hat{H}'|200\rangle = \langle 200|\hat{H}'|210\rangle = \frac{e\mathcal{E}\hbar^2}{mZe} = e3\mathcal{E}a_0 \equiv -E$$

$$\begin{vmatrix} -E' & 0 & -E & 0 \\ 0 & -E' & 0 & 0 \\ -E & 0 & -E' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E' \end{vmatrix} = 0 \rightarrow E' = 0, 0, +E, -E$$

כלומר נקבל פיצול של הרמה $E_2^{(0)}$ ל-3 רמות



ללא שדה חיצוני , בהשפעת שדה חיצוני $\mathcal{E}$

נרשום את פונקציות הגל המלכסנות את $\hat{H}'$ בצורה

$$\varphi = a|200\rangle + b|211\rangle + c|210\rangle + d|21-1\rangle$$

ונחפש את C_0 המשוואות

$$\begin{pmatrix} -E' & 0 & -E & 0 \\ 0 & -E' & 0 & 0 \\ -E & 0 & -E' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

עבור $E' = 0, \pm E$

ונקבל

אורביטל מטען בכיוון $-\hat{z}$ – $\varphi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|200\rangle - |210\rangle\right) \rightarrow E = E_2^{(0)} + E$

אורביטל מטען בכיוון $+\hat{z}$ – $\varphi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|200\rangle + |210\rangle\right) \rightarrow E = E_2^{(0)} - E$

$\varphi = |211\rangle \quad , \quad \varphi = |21-1\rangle \rightarrow E = E_2^{(0)}$

פונקציות גל עם התפלגות מטען
סימטרית ביחס לציר $\hat{z}$

האפקט התגלה ע"י סטרק ב 1913.
גורם להרחבת קווים הנפלטים מפלסמה.

לסיום פרדוקס EPR

פרדוקס EPR

"Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be considered complete?"

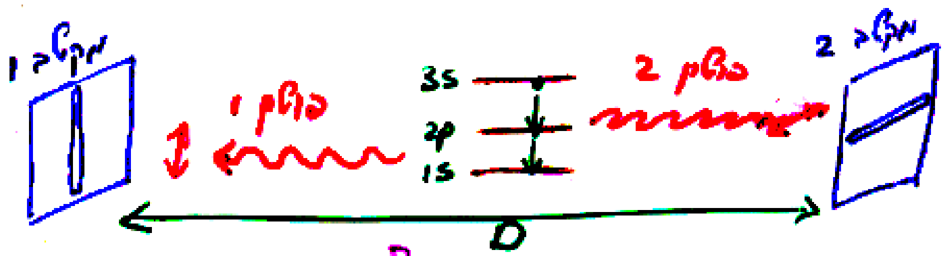
Einstein, Podolsky, Rosen 1935 Physical Review 47, 777.

בוהר: ψ - תיאור מלא

EPR: ψ - לא תיאור מלא (← משתנים נסתרים?)

הוכחה

ניסוי מחשבתי



אטום פולט 2 פוטונים עם תנע כולל אפס, ב t_0 נמדוד את הקיטוב של פוטון 1 (נאמר אנכי) ← נדע מיד את מישור הקיטוב של פוטון 2 (נאמר אופקי).

(נאמר D = מיליון שנות-אור)

המדידה נעשתה על פוטון 1 — לא הפרענו את מצב פוטון 2 ← קיטוב פוטון 2 לא השתנה — ידוע אחרי המדידה ← היה ידוע גם לפני המדידה.

אבל ψ לא מאפשרת לנבא את קיטוב פוטון 2 לפני המדידה

← ψ איננו תיאור מלא (הנחה נסתרת של לוקליות)

האם הקיטוב של פוטון 2 היה מוגדר לפני מדידת פוטון 1 ?

לא! , הוכח ב 1982 ע"י Aspect et al ← EPR טעו.

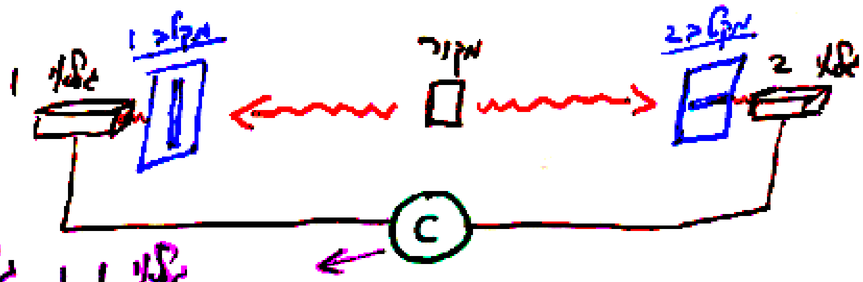
מסקנה: מדידה בנקודה x יכולה לקבוע מיידית את תוצאות המדידה בנקודה y (גורם "לקריסה" ב y)

בניגוד מוחלט להנחת היסוד של "לוקאליות"

לוקאליות: מדידה מקומית ← השפעה מקומית

איך נראה נסיונית שהקיטוב של פוטון 2 לא היה מוגדר לפני המדידה?

מערך הניסוי



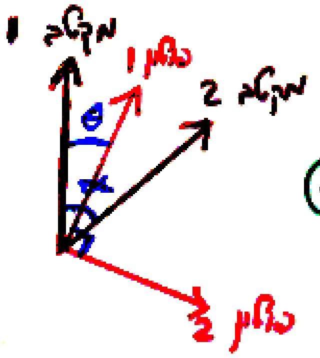
גלאי 1	גלאי 2	
1	0	– מקדד פוטון
1	1	– אין פוטון
0	1	
⋮	⋮	

בדיקת המתאם בין גילוי פוטונים בגלאי 1 לגילוי פוטונים בגלאי 2, כתלות ב-α - הזווית בין המקטבים

$C(\alpha) = ?$ – החפיפה בין גילוי פוטון בגלאי 1 וגלאי 2.

$C(\alpha)$ עפ"י אלקטרומגנטיות קלאסית

כיווני הקיטוב מוגרלים מקומית



α - הזווית בין המקטבים (נקבע בניסוי)

θ - הזווית בין פוטון 1 למקטב 1 (אקראית)

$90+\theta-\alpha$ – " " " 2 " 2 "

$P_1 = \cos^2\theta$ – הסיכוי (=עוצמת הקרינה) של פוטון 1 לעבור את מקטב 1

$P_2 = \cos^2(90+\theta-\alpha) = \sin^2(\alpha-\theta)$ – כנ"ל ל 2.

הזווית θ אקראית ← צריך לסכם על כל θ $0-\pi$.

$$C(\alpha) = \frac{\int_0^\pi P_1 \cdot P_2 \, d\theta}{\int_0^\pi d\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\theta \sin^2(\alpha-\theta)\, d\theta$$

$$\sin(\alpha-\theta) = \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta$$

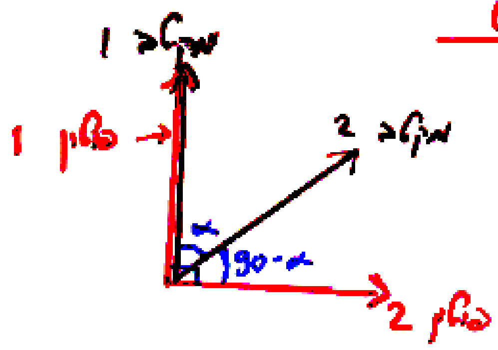
$$\rightarrow \cos^2\theta \cdot \sin^2(\alpha-\theta) = \cos^2\theta\left[\sin^2\alpha\cos^2\theta + \cos^2\alpha \underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta} - 2\cos\alpha\sin\alpha\cos\theta\sin\theta\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\pi}\int \cos^4\theta \, d\theta = \frac{3}{8}$$

$$\rightarrow \quad C(\alpha) = \frac{3}{8}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\cos^2\alpha - \frac{3}{8}\cos^2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \left.\frac{\cos^4\theta}{-4}\right]_0^\pi$$

$$\underline{C(\alpha) = \frac{1+2\sin^2\alpha}{8}}$$ – עבור קיטוב שנקבע מקומית

$C(\alpha)$ עפ"י תורת הקוונטים

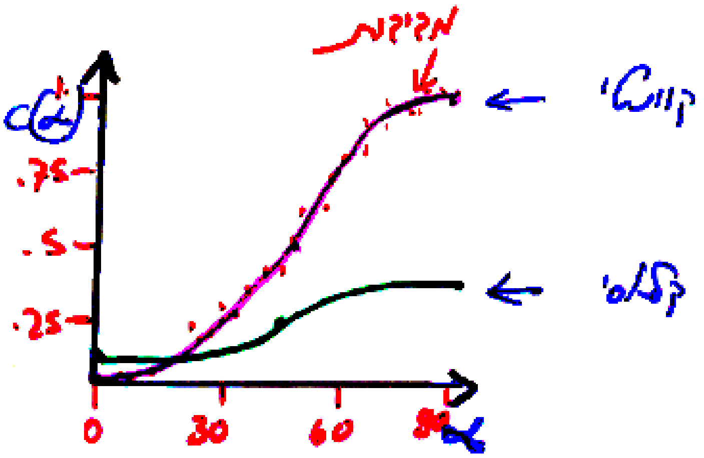


בקיטוב של פוטון 1 נקבע
ברגע המדידה (בכיוון של
מקטב 1)

הסיכוי של פוטון 2 לעבור את מקטב 2 → $P_2(1) = \cos^2(90-\alpha) = \sin^2\alpha$

בהינתן מעבר פוטון 1 את מקטב 1.

$$C(\alpha) = \sin^2\alpha$$



המדידות מאשרות את הניבוי עפ"י תורת הקוונטים

חישוב $C(\alpha)$ באמצעות פונקציות הגל

משתמש בספינורים (בכיוון $\hat{z}$)

$$\Psi_Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle - |\beta_1\rangle|\alpha_2\rangle\right)$$

קוונטי

מהדרישה לפונקציה
אנטי סימטרית (עקרון האיסור
של פאולי לפרמיונים)
(מצב שזור - Entangled state)

במערכת המקטב (בכיוון θ)

$$|\alpha\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\alpha'\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|\beta'\rangle$$
$$|\beta\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|\alpha'\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|\beta'\rangle$$

$$\Psi_C = |\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle$$

קלסי

חלקיק ראשון, חלקיק שני

לא מקיים את עקרון האיסור
חלקיקים לא זהים (בגלל הקיטוב
מוגדר ושונה)

$$|\alpha'\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\beta\rangle$$
$$|\beta'\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|\beta\rangle$$

נשתמש באופרטורי ההטלה

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle$$

$$\hat{P}_n = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

האופרטור $\hat{P}_n$ נותן את ההטל של ψ על φ_n

$$\hat{P}_n|\psi\rangle = a_n|\varphi_n\rangle$$

$$\langle\psi|\hat{P}_n^{+}\hat{P}_n|\psi\rangle = a_n^2$$

נחשב את ההטל של אלקטרון 1 על מקטב (שטרן-גרלך) 1.

x ההטל של אלקטרון 2 על מקטב 2.

= החפיפה בין המצב ההתחלתי לסופי

$$\psi_f = |\alpha_1\rangle|\beta_2'\rangle = |\alpha_1\rangle\left(-\sin\frac{\theta}{2}|\alpha_2\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|\beta_2\rangle\right)$$

אלקטרון ראשון עבר מסנן SG1 ב $+\frac{\hbar}{2}$

שני עבר מסנן SG2 ב $-\frac{\hbar}{2}$

$$C(\theta) = |\langle\psi_f|\psi_0\rangle|^2$$

$$= \left|\langle\alpha_1|\left(-\sin\frac{\theta}{2}\langle\alpha_2| + \cos\frac{\theta}{2}\langle\beta_2|\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle - |\beta_1\rangle|\alpha_2\rangle\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(-\sin\frac{\theta}{2}\langle\alpha_1|\langle\alpha_2| + \cos\frac{\theta}{2}\langle\alpha_1|\langle\beta_2|\right)\left(|\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle - |\beta_1\rangle|\alpha_2\rangle\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

במישור הקלאסי

$$\psi = |\alpha_1'\rangle|\beta_1'\rangle$$

האלקטרונים מקוטבים בכיוון θ כלשהו במרחב

← פונקצית הגל נרשום באמצעות $|\alpha\rangle$! $|\beta\rangle$

$$\psi = \left(\cos\frac{\theta}{2}|\alpha_1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\beta_1\rangle\right)\left(-\sin\frac{\theta}{2}|\alpha_2\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|\beta_2\rangle\right)$$

$$= -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\underbrace{|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle}_{S=1} + \cos^2\frac{\theta}{2}\underbrace{|\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle}_{S=0} - \sin^2\frac{\theta}{2}\underbrace{|\beta_1\rangle|\alpha_2\rangle}_{S=0} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\underbrace{|\beta_1\rangle|\beta_2\rangle}_{S=1}$$

← יתכנו מדידות שיתנו ספין באותו כיוון למרות שהתחלנו ממצב ספינים נגדיים.

חוק השימור יתקיים רק <u>בממוצע</u> ולא לכל מדידה ומדידה.