מטריצות התנע הזויתי

נשתמש בבסיס הפונקציות העצמיות של התנ"ז Y_ℓ^m.

עבור ℓ נתון הוקטורים יהיו בגודל $2\ell+1$ והמטריצות $(2\ell+1)^2$.

$$\hat{L}^2_{m,m'} = \hbar^2 \ell(\ell+1)\delta_{m,m'} \qquad \hat{L}_{z\,m,m'} = \hbar m \delta_{m,m'}$$

לדוגמא: עבור $\ell=2$

$$\hat{L}^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \hbar^2 \qquad \hat{L}_z = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \hbar$$

(עמודות: $m \rightarrow$, שורות: $m' \downarrow$)

אופרטורי הסולם מקיימים את הקשרים:

$$\hat{L}_\pm |\ell,m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)}\,|\ell,m\pm1\rangle$$

ולכן

$$\hat{L}_{\pm\,m,m'} = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)}\,\delta_{m,m'\pm1}$$

$$\hat{L}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \hbar \qquad \hat{L}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \hbar$$

מכאן ניתן לקבל בצורה פשוטה את $\hat{L}_x$ ו $\hat{L}_y$

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-) \qquad \hat{L}_y = -\frac{i}{2}(\hat{L}_+ - \hat{L}_-)$$

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ עבור $\ell=1$

מהי הטרנספורמציה שתלכסן את $\hat{L}_x$?

כלומר מהי המטריצה $\hat{U}$ שתיתן $\hat{L}'_x = \hat{U}\hat{L}_x\hat{U}^{-1}$ - מטריצה אלכסונית.

$$U_{np} \equiv \langle f_n | \varphi_p \rangle$$

f_n: הבסיס בו $\hat{L}_x$ אלכסוני

φ_p: הבסיס בו $\hat{L}_z$ אלכסוני

מהו הבסיס $\{f_n\}$?

הבסיס מקיים $\hat{L}_x|f_n\rangle = b_n|f_n\rangle$

כלומר

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\lambda_n\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}-\lambda_n&1&0\\1&-\lambda_n&1\\0&1&-\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = 0$$

פתרון לא טריוויאלי אם $\det(\ ) = 0 \to -\lambda_n(\lambda_n^2-1) - 1\cdot\lambda_n = 0$

$\lambda_n = 0, \pm\sqrt{2}$ $\quad (b_n = 0, \pm\hbar)$

$n=1$ – הפתרון עם $\lambda=\sqrt{2}$ $(b=\hbar)$

מהם a_1, b_1, c_1 ?

$$\begin{pmatrix}-\sqrt2&1&0\\1&-\sqrt2&1\\0&1&-\sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix} = 0 \to \left.\begin{matrix}-\sqrt2 a_1 + b_1 = 0\\ a_1 - \sqrt2 b_1 + c_1 = 0\end{matrix}\right\} \begin{matrix}b_1 = \sqrt2 a_1\\ c_1 = a_1\end{matrix}$$

ומתנאי הנרמול: $a_1^2+b_1^2+c_1^2 = 1 \to a_1^2(1+2+1) = 1 \to a_1 = \frac{1}{2}$

$|f_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt2\\1\end{pmatrix}$ ←

ובאותו אופן נקבל

עבור $b=0$: $|f_2\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

עבור $b=-\hbar$: $|f_3\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt2\\1\end{pmatrix}$

כאשר $|\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $|\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $|\varphi_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ← מאפשר חישוב $\hat{U}$.

מטריצות הספין של פאולי

תזכורת

אם מתקיים $[\hat{J}_x,\hat{J}_y]=i\hbar\hat{J}_z$, $[\hat{J}_y,\hat{J}_z]=i\hbar\hat{J}_x$, $[\hat{J}_z,\hat{J}_x]=i\hbar\hat{J}_y$

אז יש פונקציות עצמיות משותפות ל $\hat{J}_z$ ו- $\hat{J}^2$ המקיימות:

($\hat{J}_x$ או $\hat{J}_y$ או)

$$\hat{J}^2|\psi_{\ell m}\rangle=\hbar^2\ell(\ell+1)|\psi_{\ell m}\rangle , \quad \hat{J}_z|\psi_{\ell m}\rangle=\hbar m|\psi_{\ell m}\rangle$$

כאשר ℓ - מספר שלם, או מספר שלם + $\frac{1}{2}$

לפרמיונים (כל החלקיקים היציבים עם מסה $m>0$)

יש תנ"ע עצמי ≡ ספין — $\ell\equiv s=\frac{1}{2}$

כלומר, יש פונקציות עצמיות (≡ "מצבי החלקיקים") עם

$$S_z=\pm\frac{\hbar}{2} , \quad S^2=\frac{3}{4}\hbar^2 \quad (S_x \text{ או } S_y \text{ או})$$

($2\ell+1$ היטלים אפשריים, מ- $-\ell$ עד $+\ell$)

נסמן: $|s,m_s\rangle=|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\equiv\alpha$, $|s,m_s\rangle=|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\equiv\beta$

הפונקציות α,β לא ניתנות לרישום במרחב $\vec{x}$ (או $\vec{p}$)

נוח מאוד להשתמש במטריצות 2x2 עבור $\hat{S}_i$, ווקטורים עבור α,β.

מהי ההצגה המטריצית של אופרטורי הספין?

מהי התוצאה של הפעלת $\hat{S}^2,\hat{S}_x,\hat{S}_y,\hat{S}_z$ על α ו- β?

מכיון ש α ו- β הן פונקציות עצמיות של $\hat{S}^2,\hat{S}_z$ נקבל

$$\hat{S}^2\alpha=\frac{3}{4}\hbar^2\alpha , \quad \hat{S}_z\alpha=\frac{\hbar}{2}\alpha$$

$$\hat{S}^2\beta=\frac{3}{4}\hbar^2\beta , \quad \hat{S}_z\beta=-\frac{\hbar}{2}\beta$$

מהי התוצאה של הפעלת $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ על α, β ?

נשתמש בקשרים שמצאנו עבור אופרטורי הסולם

$$\hat{S}_\pm \equiv \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\,|s, m_s \pm 1\rangle$$

אשר פעולתם על α, β נותנת:

$$\hat{S}_+\alpha = 0 \quad , \quad \hat{S}_-\alpha = \hbar\beta \quad , \quad \hat{S}_+\beta = \hbar\alpha \, , \quad \hat{S}_-\beta = 0$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2} \quad , \quad \hat{S}_y = \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i}$$

$$\rightarrow \hat{S}_x\alpha = \frac{\hbar}{2}\beta \quad , \quad \hat{S}_y\alpha = \frac{i}{2}\hbar\beta \, , \quad \hat{S}_x\beta = \frac{\hbar}{2}\alpha \, , \quad \hat{S}_y\beta = \frac{-i}{2}\hbar\alpha$$

<u>ובכתיבתם המטריציונית הקומפקטית:</u>

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} \langle\alpha|\hat{S}_x|\alpha\rangle, & \langle\alpha|\hat{S}_x|\beta\rangle \\ \langle\beta|\hat{S}_x|\alpha\rangle, & \langle\beta|\hat{S}_x|\beta\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ובאותו אופן

$$\hat{S}_y = \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \hat{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – וקטורי הספין $\equiv$ ספינורים.

הספינורים אורתונורמליים

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\beta|\beta\rangle = 1 \qquad \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle = 0$$

<u>מהם הוקטורים העצמיים של $\hat{S}_x$ ו $\hat{S}_y$?</u>

"by insepction" רואים ש

$$\hat{S}_x(\alpha+\beta) = \frac{\hbar}{2}(\alpha+\beta) , \quad \hat{S}_x(\alpha-\beta) = -\frac{\hbar}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\hat{S}_y(\alpha+i\beta) = \frac{\hbar}{2}(\alpha+i\beta) , \quad \hat{S}_y(\alpha-i\beta) = -\frac{\hbar}{2}(\alpha-i\beta)$$

ולכן הוקטורים העצמיים המנורמלים הם :

$$\alpha_x=\frac{1}{\sqrt2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sqrt2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_x=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_y=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix},\quad \beta_y=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

מקדמים

$$\gamma=a_+\alpha+a_-\beta=\begin{pmatrix}a_+\\a_-\end{pmatrix}$$ ← **הספינור במצב כללי כלשהו**

$$|a_+|^2+|a_-|^2=1$$

מהם $\langle S_x\rangle,\langle S_y\rangle,\langle S_z\rangle$ במצב זה ?

$$\langle S_x\rangle=\langle\gamma|\hat S_x|\gamma\rangle=\frac{\hbar}{2}(a_+^*,a_-^*)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_+\\a_-\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\hbar}{2}(a_+^*,a_-^*)\begin{pmatrix}a_-\\a_+\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}(a_+^*a_-+a_-^*a_+)$$

$$\langle S_y\rangle=\langle\gamma|\hat S_y|\gamma\rangle=-\frac{i\hbar}{2}(a_+^*a_--a_-^*a_+)$$

$$\langle S_z\rangle=\langle\gamma|\hat S_z|\gamma\rangle=\frac{\hbar}{2}\left(|a_+|^2-|a_-|^2\right)$$

מהו $\vec S^2$?

האופרטור $\hat S$ בכיוון כללי כלשהו $\vec u$

הביטוי הקלאסי להטל $\vec L$ בכיוון $\vec u$ הוא $\vec L\cdot\vec u$

← האופרטור שיתן את ערך ההטלה של $\vec L\cdot\vec u$ הוא $\hat{\vec L}\cdot\vec u$

$$\vec u=(\sin\theta\cos\varphi\,\hat x,\ \sin\theta\sin\varphi\,\hat y,\ \cos\theta\,\hat z)$$

ובאותו אופן האופרטור שנותן את ערך ההטלה של s בכיוון $\vec u$

$$\hat S_u=\hat{\vec S}\cdot\vec u=\hat S_x\sin\theta\cos\varphi+\hat S_y\sin\theta\sin\varphi+\hat S_z\cos\theta$$

$$\hat S_u=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

והוקטורים העצמיים הם:

$$\alpha_u=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}\end{pmatrix}\qquad \beta_u=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi/2}\\ \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}\end{pmatrix}$$

(ניתן לקבל ישירות ע"י הפעלת (שונות-מטריצת הסיבוב)

בניסוי שטרן-גרלך מיצרים אלומת אלקטרונים עם ספין בזוית של 60° לציר z, האלומה עוברת דרך מפצל נוסף בכיוון $\hat{z}$, איזה חלק יתפצל בכיוון $-\hat{z}$?

* מה יקרה לספינור אם נסובב אותו ב 2π?

סביב ציר $\hat{z}$ → $\alpha(\varphi+2\pi)=-\alpha(\varphi)$, $\alpha(\theta+2\pi)=-\alpha(\theta)$ סביב ציר הניצב ל $\hat{z}$!

ניתן לראות זאת גם מהפעלת אופרטור הסיבוב

$$\hat{R}(\phi)=e^{i\frac{\vec{\phi}\cdot\hat{\vec{J}}}{\hbar}}$$

$$\hat{R}(\phi)=e^{i\frac{\phi\hat{J}_z}{\hbar}}\qquad \vec{\phi}=\phi\hat{z}\ \text{עבור}$$

עבור $\hat{J}_z=\hat{S}_z$ והפעלת האופרטור על פונקציה עצמית של $\hat{S}_z$

$$\hat{S}_z|\alpha\rangle=\frac{\hbar}{2}|\alpha\rangle$$

פירוק ה $e^{\hat{S}_z}$ לפולינום, הפעלת האופרטור, קבלת פולינום חדש, הכנסה שוב ל $e^{\cdots}$.

$$\rightarrow\quad \hat{R}(\phi)|\alpha\rangle=e^{\frac{i\phi\hat{S}_z}{\hbar}}|\alpha\rangle=e^{\frac{i\phi\cdot\frac{\hbar}{2}}{\hbar}}|\alpha\rangle=e^{i\frac{\phi}{2}}|\alpha\rangle$$

← שינוי סימן פונקצית הגל עבור $\phi=2\pi$

* איך אפשר לגלות שפונקצית הגל שינתה סימן?

* איך אפשר לסובב את הספינור באופן נסיוני?

פרצסיה של אלקטרון בשדה מגנטי

נתון אלקטרון במנוחה בשדה מגנטי אחיד, כיצד ישפיע השדה על כוון הספין של האלקטרון?

תזכורת

הקשר בין מומנט מגנטי לתנע זוויתי (קלאסי)

$$\vec{\mu}=\frac{q}{2m}\vec{L}$$

מומנט מגנטי $(\mu=I\cdot A)$

עבור לולאת זרם

תנע זוויתי מסלולי

ממשוואת דירק מתקבל עבור הספין:

$$\vec{\mu}=\frac{e}{m}\vec{S} \qquad \left(\vec{\mu}=g\frac{e}{2m}\vec{S}\right)$$

היחס הגירומגנטי $g=2$

אם נשתמש במטריצות פאולי המוגדרות ע"י

$$\hat{\sigma}\equiv\frac{2}{\hbar}\hat{S}$$

$$\left(\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_y=i\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)$$

נקבל

$$\vec{\mu}=\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}=\mu_B\vec{\sigma}$$

Bohr magneton — $\mu_B\equiv\underset{\uparrow\ \text{mks}}{\frac{e\hbar}{2m}}=\underset{\uparrow\ \text{cgs}}{\frac{e\hbar}{2mc}}=9.27\cdot10^{-21}\frac{\text{erg}}{\text{gauss}}$

ההמילטוניאן של האלקטרון נתון ע"י

$$\hat{H}=-\hat{\vec{\mu}}\cdot\hat{\vec{B}}$$

$$=\mu_B\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{B}}$$

לאלקטרון מטען $-e$

נניח $\vec{B}=B_0\hat{z}$ ונקבל

$$\hat{H}=\mu_B B_0\hat{\sigma}_z$$

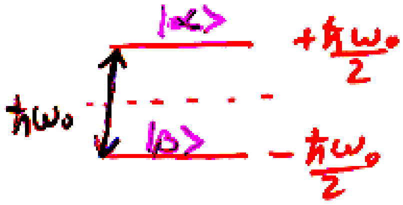
נסמן $\omega_0=\mu_B B_0\frac{2}{\hbar}$ ונקבל

$$\hat{H}=\omega_0\hat{S}_z$$

← ל $\hat{H}$ אותם וקטורים עצמיים כמו ל $\hat{S}_z$

והמצבים העצמיים של $\hat{H}$

$$\hat{H}|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2}\omega_0|\alpha\rangle \quad , \quad H|\beta\rangle = -\frac{\hbar}{2}\omega_0|\beta\rangle$$



מערכת עם שתי רמות אנרגיה

חישוב ב cgs   חישוב ב MKS

$$\omega_0 = \frac{eB}{mc} = \frac{4.8\cdot10^{-10}\,\text{e.s.u.}\cdot 1\,\text{Gauss}}{9.1\cdot10^{-28}\,\text{gr}\cdot 3\cdot10^{10}\,\text{cm/s}} = \frac{1.6\cdot10^{-19}\,C\cdot10^{-4}\,\text{Tesla}}{9.1\cdot10^{-31}\,\text{kg}} = 1.8\cdot10^{7}\,\text{rad/s}$$

כיצד תתפתח המערכת בזמן?

נניח ב $t=0$

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi/2}|\beta\rangle$$

(הספין בכיוון θ, φ)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$$

משתמשים בקשר הכללי ונקבל

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{(\varphi+\omega_0 t)}{2}}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{(\varphi+\omega_0 t)}{2}}|\beta\rangle$$

מתאר מצב עצמי של ספין $+\frac{\hbar}{2}$ בכיוון

$$\theta(t) = \theta$$
$$\varphi(t) = \varphi + \omega_0 t$$

כלומר כיוון הספין $\vec{u}$ מסתובב סביב ציר $\hat{z}$ בתדר ω_0.

נקיפת לרמור - Larmor precession =

ערכי התצפית של רכיבי הספין

$$\langle S_z(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{S}_z|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{\hbar}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$$

← ב"ת בזמן

(זווית קבועה עם ציר $\hat{z}$) ← אנרגיית האלקטרון לא משתנה

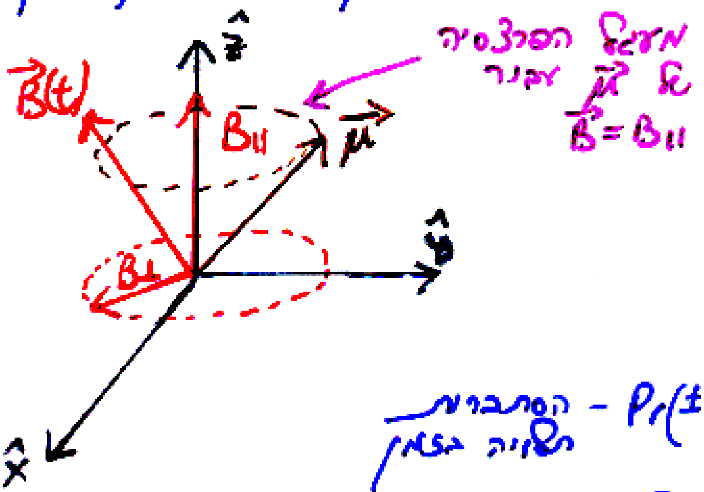
$$\langle S_x(t)\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\alpha}, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\alpha}\right)\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\alpha}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\alpha}\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos(\varphi+\omega_0 t)$$

$$\langle S_y(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin(\varphi+\omega_0 t)$$

← תלויים בזמן כמו תנ"ז קלאסי המסתובב בתדר ω_0 סביב ציר $\hat{z}$.

תהודה מגנטית

כיצד ישפיע שדה מגנטי נוצב, המשתנה בזמן, על כיוון ספין האלקטרון?



הספין יבצע פרצסיה סביב $\vec{B}$ שכוונו משתנה בזמן

← μ_B ישתנה בזמן,

$\langle S_z \rangle$ תלוי בזמן, $P_\uparrow(\pm\frac{\hbar}{2})$ - הסתברות תלויה בזמן

← לאחר מדידת S_z (הלוך למצב עצמי) יתכן מעבר למצב העצמי השני (בליעה או פליטת $\hbar\omega_0$)

חישוב הסתברות המעבר

מהם $a(t), b(t)$? $\psi(t)=\begin{pmatrix}a(t)\\ b(t)\end{pmatrix}$

נפתור את משוואת שרדינגר

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=-\frac{g\mu_B}{2}\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}B_x+i\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}B_y+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}B_z\right]\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

כאשר $B_x=B_\perp\cos\omega t$, $B_y=-B_\perp\sin\omega t$, $B_z=B_\parallel$

נקבל

$$\rightarrow\quad \frac{\partial a}{\partial t}=i\left(\Omega_\perp b e^{i\omega t}+\Omega_\parallel a\right),\quad \frac{\partial b}{\partial t}=i\left(\Omega_\perp a e^{-i\omega t}-\Omega_\parallel b\right)$$

כאשר $\Omega_\perp=\frac{g\mu_B B_\perp}{2\hbar}$, $\Omega_\parallel=\frac{g\mu_B B_\parallel}{2\hbar}$

ננחש פתרון מהצורה $a(t)=\bar{a}e^{i\omega_a t}$, $b(t)=\bar{b}e^{i\omega_b t}$

קבועים (בלתי ב t)

מהם $\bar{a},\bar{b},\omega_a,\omega_b$?

נציב במשוואות ל $\dot a$ ו $\dot b$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} \omega_a-\Omega_\parallel , & -\Omega_\perp e^{-i\varphi t} \\ -\Omega_\perp e^{i\varphi t} , & \omega_b+\Omega_\parallel \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar a \\ \bar b \end{pmatrix}=0$$

כאשר $\varphi\equiv\omega_a-\omega_b-\omega$

לא מובן ש $\bar a$ ו $\bar b$ יהיו בלת' בזמן צריך להתקיים $\varphi=0$

ולא מובן שהפתרון ל.א יהיה טריוויאלי צריך להתקיים

$$\omega_b=-\frac{\omega}{2}\pm\bar\omega \quad , \quad \omega_a=\frac{\omega}{2}\pm\bar\omega \quad , \quad \bar\omega^2\equiv\left(\Omega_\parallel-\frac{\omega}{2}\right)^2+\Omega_\perp^2$$

שני פתרונות כי המשוואות ל a ו b הן מסדר שני. $(\ddot a+..\dot a+..a=0)$ (איפוס הדטרמיננטה)

הפתרון הכללי

$$a(t)=a_1 e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\bar\omega\right)t}+a_2 e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\bar\omega\right)t}$$

$$b(t)=b_1 e^{-i\left(\frac{\omega}{2}-\bar\omega\right)t}+b_2 e^{-i\left(\frac{\omega}{2}+\bar\omega\right)t}$$

נניח תנאי התחלה

$\langle S_z\rangle=\frac{\hbar}{2}$

$$a(0)=1 \quad , \quad b(0)=0$$

$$\rightarrow b_1=-b_2 \rightarrow b(t)=c\,e^{-\frac{i\omega t}{2}}\sin\bar\omega t$$

מהו c ?

$$\frac{\partial b}{\partial t}=i\Omega_\perp a e^{-i\omega t}-\Omega_\parallel b$$ – משוואת שרדינגר

$$\rightarrow \frac{\partial b}{\partial t}(t=0)=\underline{i\Omega_\perp}$$

ומהפתרון שמצאנו

$$\frac{\partial b(t)}{\partial t}=-\frac{i\omega}{2}b(t)+c\,e^{-\frac{i\omega t}{2}}\bar\omega\cos\bar\omega t$$

$$\rightarrow \left.\frac{\partial b(t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\underline{c\bar\omega}$$

$$\rightarrow \underline{c=\frac{i\Omega_\perp}{\bar\omega}}$$

ובאופן דומה $a(0)=1 \rightarrow a_1+a_2=1$

ממשוואת שרדינגר $\frac{\partial a}{\partial t}(t=0)=i\Omega_{11}$

מהפתרון שמצאנו - $\frac{\partial a}{\partial t}(t=0)=i\left(\frac{\omega}{2}+\bar{\omega}\right)a_1+i\left(\frac{\omega}{2}-\bar{\omega}\right)a_2$

$$i\left(\frac{\omega}{2}+\bar{\omega}\right)a_1+i\left(\frac{\omega}{2}-\bar{\omega}\right)(1-a_1)=i\Omega_{11} \longrightarrow a_1=\frac{\Omega_{11}-\frac{\omega}{2}}{\bar{\omega}}+\frac{1}{2}$$

והפתרון המלא

$$\psi(t)=\begin{pmatrix}a(t)\\ b(t)\end{pmatrix}=\frac{\sin\bar{\omega}t}{\bar{\omega}}\begin{pmatrix}e^{i\frac{\omega}{2}t}\left[i\left(\Omega_{11}-\frac{\omega}{2}\right)+\bar{\omega}\,ctg\,\bar{\omega}t\right]\\ ie^{-i\frac{\omega}{2}t}\cdot\Omega_\perp\end{pmatrix}$$

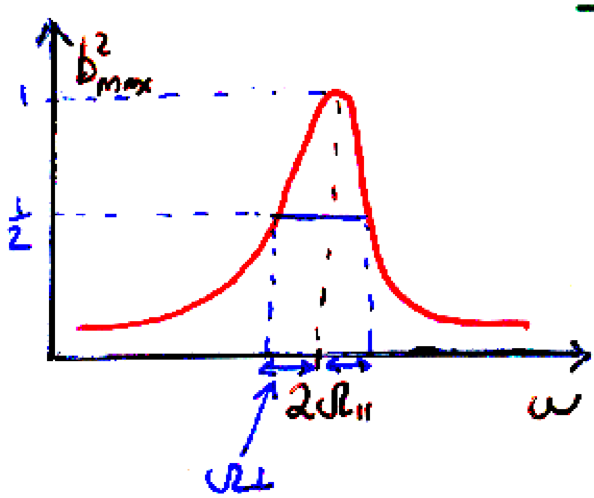
מקיים את תנאי הנירמול $|a(t)|^2+|b(t)|^2=1$

הסיכוי למעבר ספין

$$|b(t)|^2=\left[\frac{\Omega_\perp^2}{\left(\Omega_{11}-\frac{\omega}{2}\right)^2+\Omega_\perp^2}\right]\cdot\sin^2\bar{\omega}t$$

תנודה מתנהגת בתדר $\bar{\omega}$. אמפליטודה מקסימלית כאשר

תדר התהודה - $\omega=2\Omega_{11}=\frac{g\mu_B B_{11}}{\hbar}$ (עבור $B=B_{11} \leftarrow =\omega_0$)



ω, B_{11} - נקבעים נסיונית

$\mu=\frac{e\hbar}{2Mc}$

← מאפשר מדידה מדוייקת של g

$g_e=-2$ $g_n=-3.82$ $g_p=5.58$

כיצד אפשר להבטיח סיכוי

של 100% של מעבר ספין ?