ובאותו אופן $\hat{J}_- \varphi_m = \varphi_{m-1}$

כלומר יש C_0 של פונקציות עצמיות של $\hat{J}_z$: $\ldots\varphi_{m-1}, \varphi_m, \varphi_{m+1}\ldots$

עם ערכים עצמיים: $\ldots m-1, m, m+1\ldots$

מהו טווח הערכים האפשריים ל m?

נשתמש בעובדה ש $\hat{J}_z$ ו $\hat{J}^2$ חילופיים ← φ_m הן גם פונקציות עצמיות של $\hat{J}^2$

נניח: $$\hat{J}^2\varphi_m = J^2\varphi_m = \hbar^2 L^2 \varphi_m$$

הערך העצמי של $\hat{J}^2$ מספר חסר יחידות

מהו הערך העצמי של $\hat{J}^2$ עבור φ_{m+1}?

כלומר $$\hat{J}^2(\hat{J}_+\varphi_m) = ?$$

נשתמש ב $[\hat{J}^2, \hat{J}_z]=0$ ← $\hat{J}^2\hat{J}_+\varphi_m = \hat{J}_+\hat{J}^2\varphi_m = \hbar^2L^2 J_+\varphi_m$

← גם כן $\hbar^2L^2$, כלומר לכל הסט $\{\varphi_m\}$ אותו ערך עצמי של $\hat{J}^2$

עבור φ_m כלשהי: $$\langle J^2\rangle = \langle J_x^2\rangle+\langle J_y^2\rangle+\langle J_z^2\rangle$$

$$\to \hbar^2L^2 = \langle J_x^2\rangle+\langle J_y^2\rangle+\hbar^2 m^2$$

תשובה: $$\to \hbar^2L^2 \geq \hbar^2m^2 \to |L|\geq|m|$$

מהם הערכים האפשריים עבור m?

נניח $m=m_{max}$ $(m=m_{min})$, הערך המקסימלי (המינימלי) האפשרי ב L נתון

$$\to \hat{J}_+\varphi_{m_{max}}=0 \quad , \quad \hat{J}_-\varphi_{m_{min}}=0$$

נשתמש בקשר $$\hat{J}^2 = \hat{J}_\mp\hat{J}_\pm + \hat{J}_z^2 \pm \hbar\hat{J}_z$$

$$\rightarrow \quad \hat{J}^2 \varphi_{m_{max}} = \hat{J}_z^2 \varphi_{m_{max}} + \hbar \hat{J}_z \varphi_{m_{max}}$$

$$\rightarrow \quad \hbar^2 L^2 = \hbar^2 m_{max}^2 + \hbar^2 m_{max}$$

ובאותו אופן

$$\hat{J}^2 \varphi_{m_{min}} = \hat{J}_z^2 \varphi_{m_{min}} - \hbar \hat{J}_z \varphi_{m_{min}}$$

$$\rightarrow \quad \hbar^2 L^2 = \hbar^2 m_{min}^2 - \hbar^2 m_{min}$$

כלומר

$$m_{max}^2 + m_{max} = m_{min}^2 - m_{min}$$

$$\rightarrow \quad \underline{m_{max} = -m_{min}}$$

סדרה בדידה $\{m\}$ סימטרית ביחס ל $m=0$

נסמן: $j \equiv m_{max}$

שתי סדרות אפשריות:

1. $m=0$ - נכלל בסדרה
   ← j - מספר שלם
   לדוגמא: $j=2$
   $\{m\} = -2, -1, 0, 1, 2$

2. $m=0$ לא נכלל בסדרה.
   ← j - מספר שלם + $\frac{1}{2}$
   לדוגמא: $j=1.5$
   $\{m\} = -1.5, -0.5, 0.5, 1.5$

והערך העצמי של $\hat{J}^2$ (עבור $\{\varphi_m\}$)

$$\underline{J^2 = \hbar^2 j(j+1)} \quad \leftarrow \quad \hbar^2 L^2 = \hbar^2 m_{max}^2 + \hbar^2 m_{max}$$

כאשר $\underline{J_z = \hbar m_j}$ $(m_j = -j \ldots j)$

קיבלנו את הסט האפשריים לערכים העצמיים של $\hat{J}^2$ ו $\hat{J}_z$
באמצעות <u>יחסי החילוף בלבד</u>! (ללא קשר לצורת הפונ' העצמיות)

j - שלם מייצג תנ"ע מסלולי $\vec{L}$

j - חצי שלם " " פנימי - ספין $\vec{S}$ (או $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$)

קיבלנו <u>קוונטיזציה של התנע הזויתי!</u>

הפונקציות העצמיות של $\hat{L}^2$ ו $\hat{L}_z$

$\varphi_{\ell,m}$ - פונקציות עצמיות משותפות ל $\hat{L}^2$ ו $\hat{L}_z$

$$\hat{L}^2 \varphi_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) \varphi_{\ell m}$$

$$\hat{L}_z \varphi_{\ell m} = \hbar m \varphi_{\ell m}$$

כיצד נמצא את $\varphi_{\ell m}$?

1. נפתור את המשוואות הדיפרנציאליות

2. נפתור את $\hat{L}_+ \varphi_{\ell\ell} = 0$

ונמצא את שאר ה $\varphi_{\ell m}$ ע"י הפעלת $\hat{L}_-$ $\left(\hat{L}_- \varphi_{\ell\ell} = \varphi_{\ell,\ell-1}\right)$

מעבר לקואורדינטות כדוריות מקרטזיות

נוח יותר לעבוד בקואורדינטות כדוריות (מדוע?)

כיצד נרשום את $\hat{L}$ בקואורדינטות r,θ,φ ?

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$z = r\cos\theta \quad , \quad \varphi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi} \ , \ \frac{\partial}{\partial x} = \cdots \ , \ \frac{\partial}{\partial z} = \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} , & \frac{\partial r}{\partial y} , & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} , & \frac{\partial \theta}{\partial y} , & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} , & \frac{\partial \varphi}{\partial y} , & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi , & \sin\theta\sin\varphi , & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} , & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} , & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{-\sin\varphi}{r\sin\theta} , & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} , & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $x(r,\theta,\varphi)$, $y(r,\theta,\varphi)$, $\frac{\partial}{\partial x}(r,\theta,\varphi)$, $\frac{\partial}{\partial y}(r,\theta,\varphi)$ ב $\hat{L}_z$

וכנ"ל ל $\hat{L}_y$ ו $\hat{L}_x$ ונקבל:

$$\hat{L}_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\rightarrow \quad \hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y = \hbar e^{i\varphi}\left(i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hbar e^{-i\varphi}\left(\;''\quad ''\; - \;''\right)$$

$\vec{L}, \hat{L}^2$ תלויים <u>בשני משתנים בלבד!</u> (θ,φ) במקום שלושה (x,y,z)

אבל $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$, כיצד אם כך $\vec{L}$ ב"ת ב r ?

<u>פתרון ישיר של המשוואות הדיפרנציאליות</u>

נסמן:

$\varphi_{\ell m} \equiv Y_\ell^m$ - Spherical Harmonics

Y_ℓ^m – בס שלם

(שלמות – $f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell,m} a_{\ell,m} Y_\ell^m$

<u>הפונקציות העצמיות של $\hat{L}_z$</u>

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_\ell^m = \hbar m Y_\ell^m \rightarrow \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial\varphi} = im\,Y_\ell^m$$

נעשה הפרדת משתנים

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \Phi_m(\varphi)\Theta_\ell^m(\theta)$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\Phi_m}\cdot\Phi_m' = im \quad \rightarrow \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

תנאי הנירמול – $\int_0^{2\pi}\Phi_m^*\Phi_m\,d\varphi = 1$

מהם הערכים האפשריים עבור m ?

נדרוש חד ערכיות $\Phi_m(\phi)=\Phi_m(\phi+2\pi)$

$$e^{im\phi}=e^{im(\phi+2\pi)} \to e^{im\cdot 2\pi}=1$$

$$\to |m|=0,1,2,\dots$$

הפונקציות העצמיות של L^2

$$\hat{L}^2 Y_l^m = \hbar^2\lambda Y_l^m$$ הערך העצמי של L^2

$$\hat{L}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right], \quad Y_l^m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}\Theta_l^m(\theta)$$

$$\to -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta=\lambda\Theta$$

נציב $\mu\equiv\cos\theta$

$$\to \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta}{d\mu}\right]+\left[\lambda-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]\Theta=0$$

עבור $m=0$ נקבל:

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta_l}{d\mu}\right]+\lambda\Theta_l=0$$

משוואת Legendre

נציב פתרון מהצורה $\Theta_l(\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\mu^k$ - פולינום לג'נדר

ונקבל תנאי על המקדמים

$$(k+1)(k+2)a_{k+2}+[\lambda-k(k+1)]a_k=0$$

⇐ אם $a_1=0$ ⇐ $a_{2n+1}=0$, הפתרון זוגי

• $a_0=0$ $a_{2n}=0$ ״ אי זוגי

$\frac{a_{k+2}}{a_k}\to\frac{k}{k+2}$, $k\to\infty$ ולכן הטור הזה מתבדר עבור $\mu=\pm1$

פתרון (סופית) סופי בתנאי $\lambda=l(l+1)$

קבלנו חזרה את התנאי שהסקנו מיחסי החילוף $\lambda=\ell(\ell+1)$

בנוסף קומפקטית לרישום פולינומי לז'נדר

$$\Theta_\ell(\mu)\equiv P_\ell(\mu)=\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{d\mu^\ell}(\mu^2-1)^\ell$$ – נוסחת רודריגס

עבור $\ell+k$ זוגי:

$$\rightarrow a_k=\frac{(-1)^{(\ell-k)/2}(\ell+k)(\ell+k-1)\dots(k+2)(k+1)}{2^\ell \ell!}\binom{\ell}{\frac{1}{2}(\ell+k)}$$ איבר בינומי

עבור $\ell+k$ אי זוגי: $a_k=0$

המקדם של $P_\ell(\mu)$ נבחר כך ש: $P_\ell(\pm1)=(\pm1)^\ell$

$$P_0=1,\quad P_1=\mu,\quad P_2=\frac{1}{2}(3\mu^2-1),\quad P_3=\frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu)\dots$$

$$\int_{-1}^{1}P_\ell(\mu)P_{\ell'}(\mu)\,d\mu=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

← $P_\ell(\mu)$ אורתוגונליים אך לא אורתונורמליים.

עבור $m\neq0$ נקבל:

נגדיר סט חדש של פולינומים באופן הבא:

$$P_\ell^m(\mu)=(-1)^m(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_\ell(\mu)}{d\mu^m}$$

Associated Legendre Polynomials

מגדירה משוואת לז'נדר m פרמים נקבל!

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_\ell^m}{d\mu}\right]+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P_\ell^m=0$$

← $P_\ell^m(\mu)$ הם הפתרונות למשוואה עבור Θ_ℓ^m.

$P_\ell^m \underset{\text{עד כדי קבוע}}{=} P_\ell^{-m}$ (רק m^2 מופיע במשוואה)

לדוגמה:

$$P_0^0=1,\quad P_1^1=-\sin\theta,\quad P_1^0=\cos\theta,\quad P_1^{-1}=\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$P_2^2=3\sin^2\theta,\quad P_2^1=-3\sin\theta\cos\theta,\quad P_2^0=\frac{1}{3}(3\cos^2\theta-1),\quad P_2^{-1}=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta,\quad P_2^{-2}=\frac{1}{8}\sin^2\theta$$

TABLE 9.1 The first few normalized spherical harmonics and corresponding associated Legendre polynomials[a]

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

$$\int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, Y_l^m (Y_{l'}^{m'})^* = \delta_{mm'}\delta_{ll'}$$

$$P_0 = 1$$

$$P_1^1 = -\sin\theta$$

$$P_1^0 = \cos\theta$$

$$P_1^{-1} = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$P_2^2 = 3\sin^2\theta$$

$$P_2^1 = -3\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^0 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_2^{-1} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$P_2^{-2} = \frac{1}{8}\sin^2\theta$$

$$P_3^3 = -15\sin^3\theta$$

$$P_3^2 = 15\sin^2\theta\cos\theta$$

$$P_3^1 = -\frac{3}{2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)$$

$$P_3^0 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$P_3^{-1} = \frac{1}{8}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)$$

$$P_3^{-2} = \frac{1}{8}\sin^2\theta\cos\theta$$

$$P_3^{-3} = \frac{1}{48}\sin^3\theta$$

$$Y_l^{-l} = \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\sin^l\theta e^{-il\phi}$$

$$Y_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)$$

$$\sum_{m=-l}^{l} |Y_l^m(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$$

$$Y_l^{-m} = (-1)^m (Y_l^m)^*$$

$$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$$

$$Y_1^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_1^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2}\cos\theta$$

$$Y_1^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\theta e^{-i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta e^{2i\phi}$$

$$Y_2^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{\pi}\right)^{1/2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_2^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\cos\theta e^{-i\phi}$$

$$Y_2^{-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta e^{-2i\phi}$$

$$Y_3^3 = -\frac{1}{8}\left(\frac{35}{\pi}\right)^{1/2}\sin^3\theta\, e^{3i\phi}$$

$$Y_3^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{105}{2\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta\cos\theta e^{2i\phi}$$

$$Y_3^1 = -\frac{1}{8}\left(\frac{21}{\pi}\right)^{1/2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{i\phi}$$

$$Y_3^0 = \frac{1}{4}\left(\frac{7}{\pi}\right)^{1/2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$Y_3^{-1} = \frac{1}{8}\left(\frac{21}{\pi}\right)^{1/2}\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)e^{-i\phi}$$

$$Y_3^{-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{105}{2\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta\cos\theta e^{-2i\phi}$$

$$Y_3^{-3} = \frac{1}{8}\left(\frac{35}{\pi}\right)^{1/2}\sin^3\theta e^{-3i\phi}$$

מהדרישה ש $\int_{-1}^{1} |\Theta_\ell^m|^2 d\mu = 1$ נקבל:

$$\Theta_\ell^m(\mu) = \left[\frac{2\ell+1}{2}\,\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{1/2} P_\ell^m(\mu)$$

$$Y_\ell^m(\mu) = \left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\,\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{1/2} P_\ell^m(\mu)\, e^{im\varphi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m \left(Y_\ell^m\right)^*$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

$$Y_1^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

$$Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$

(להוכחות מפורטות ראה:
Arfken / Math' Methods for Physicists
פרק 12)

שלמות

$Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ - כבס' שלם, פורש את מרחב הילברט של פונקציות
L^2 (square Int'-) על פני כדור

$$\varphi(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$

כאשר:

$$a_{\ell m} = \langle Y_\ell^m | \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} \left(Y_\ell^m\right)^* \varphi(\theta,\varphi)\, d(\cos\theta)$$

מה הסיכוי למדוד ת"ע כללי $L^2 = \hbar\ell(\ell+1)$?

$$P(L^2) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2$$

כל מצבי m עם אותו ℓ

מה הסיכוי למדוד ת"ע $L_z = \hbar m$?

$$P(L_z) = \sum_{\ell=|m|}^{\ell=\infty} |a_{\ell m}|^2$$

כל מצבי ℓ עם אותו m

לדוגמא:

$$\varphi = A\sin\theta\cos\varphi = A'\left(Y_1^1 - Y_1^{-1}\right)$$