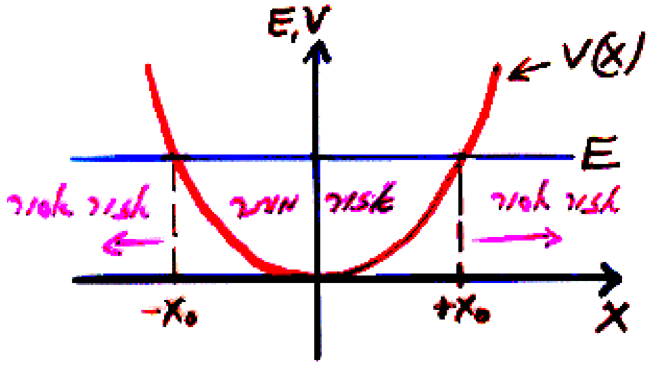
מתנד הרמוני

קלאסי

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 \equiv k/m$$

$$\rightarrow \quad E = \underbrace{\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2}_{T} + \underbrace{\tfrac{1}{2}kx^2}_{V}$$



$\pm X_0$ – נקודות הפנייה

ב $\pm X_0$ $\quad \dot{x}=0 \leftarrow E=V$

ב $x^2>x_0^2$ $\quad E<V \rightarrow T<0$

תחום אליו החלקיק לא יכול להגיע באופן קלאסי.

קוונטי

ההמילטוניאן של המערכת:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$$

משוואת שרדינגר הב״ת בזמן:

$$\rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\varphi = E\cdot\varphi$$

$$\varphi_{xx} + k^2(x)\varphi = 0 \qquad k^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\big(E - \overbrace{\tfrac{1}{2}kx^2}^{V}\big)$$

בתחום $x^2<x_0^2$ $\quad E>V \rightarrow k^2(x)>0 \rightarrow$ ל-φ_{xx} ול-φ סימנים הפוכים

← פתרון "מתנודד"

בתחום "האסור" $x^2>x_0^2$, $\quad E<V \rightarrow k^2<0 \rightarrow$ ל-φ_{xx} ול-φ אותו סימן

← פתרון דועך.

לדוגמא: עבור $x>>x_0$ נקבל בקירוב $(\beta x>>1)$

$$\varphi_{xx} = \frac{mk}{\hbar^2}x^2\varphi$$

$$\rightarrow \quad \varphi = Ae^{-\frac{\beta^2x^2}{2}} \qquad \beta^2 = \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} = \frac{m\omega_0}{\hbar}$$

אופרטורים של יצירה והכחדה

שיטה אלגברית לקבלת רמות האנרגיה במתנד הרמוני.

נגדיר: $\hat{a}^\dagger \equiv \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right)$, $\hat{a} \equiv \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right)$

אופרטור יצירה אופרטור הכחדה.

$\hat{a} \neq \hat{a}^\dagger$ - לא הרמיטיים

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ - לא חילופיים (מתקבל מכיון ש $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$)

נרשום את $\hat{H}$ באמצעות $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$, במקום $\hat{p}, \hat{x}$.

$$\hat{x} = \frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}\,\beta} \quad , \quad \hat{p} = \frac{m\omega_0}{i}\,\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}\,\beta}$$

$$\rightarrow \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k\hat{x}^2}{2} = \hbar\omega_0\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}\right)$$

(בהשתמש בקשר $\hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}$)

← מציאת הערכים העצמיים של $\hat{H}$ היא שוות ערך למציאת הערכים העצמיים של $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ $(\hat{N}^\dagger = \hat{N})$

$\hat{N}\varphi_n = n\varphi_n$ (באופן כללי יותר $\hat{N}\varphi_a = c\varphi_a$)

נמצא את הערכים האפשריים ל n (בלי לדעת מהו φ_n!)

מהי השפעת $\hat{a}$ ו $\hat{a}^\dagger$ על φ_n?

$$\hat{N}\hat{a}\varphi_n = \underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\text{הגדרת } \hat{N}}\hat{a}\varphi_n = \underbrace{(\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)}_{\text{מיחס החילוף}}\hat{a}\varphi_n = \underbrace{(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a})}_{\text{בפתיחת סוגריים}}\varphi_n = \underbrace{\hat{a}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1)}_{\text{הוצאת גורם משותף}}\varphi_n$$

$$= \hat{a}(\hat{N} - 1)\varphi_n = \hat{a}(n-1)\varphi_n = (n-1)\hat{a}\varphi_n$$

← $\hat{a}\varphi_n$ היא גם כן פונקציה עצמית של $\hat{N}$, אבל עם ערך עצמי $n-1$.

נגדיר: $\hat{N}\varphi_{n-1} = (n-1)\varphi_{n-1}$ ← $\hat{a}\varphi_n = \varphi_{n-1}$ אופרטור הורדה.

באותו אופן ניתן להראות: $\hat{N}\hat{a}^{+}\varphi_n = (n+1)\hat{a}^{+}\varphi_n$

$$\rightarrow \quad \underline{\hat{a}^{+}\varphi_n = \varphi_{n+1}}$$

↑ אופרטור העלה.

מהם הערכים האפשריים ל n ?

נשתמש בעובדה ש $\langle E\rangle > 0$

$$\langle E_n\rangle = \langle \varphi_n | \hat{H}\varphi_n\rangle = \langle \varphi_n | \hbar\omega_0(\hat{N}+\tfrac{1}{2})\varphi_n\rangle$$

$$= \langle \varphi_n | \hbar\omega_0(n+\tfrac{1}{2})\varphi_n\rangle = \underbrace{\hbar\omega_0}_{>0}(n+\tfrac{1}{2}) > 0$$

$$\rightarrow \quad \underline{n > -\tfrac{1}{2}}$$

← כל הפונקציות העצמיות עם $n<-\frac{1}{2}$ צריכות להתאפס (אם לא [illegible]?)

← $\hat{a}\varphi_0 = \varphi_{-1} = 0$

(הפתרון $\varphi_0 = 0$ כמובן לא מעניין)

מהו הערך העצמי של φ_0 ?

$$\hat{N}\varphi_0 = \hat{a}^{+}\hat{a}\varphi_0 = \hat{a}^{+}0 = 0 = 0\cdot\varphi_0 \rightarrow n=0$$

מהו הערך העצמי של φ_1 ?

$$\hat{N}\varphi_1 = \hat{N}\hat{a}^{+}\varphi_0 = \hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}^{+}\varphi_0 = \hat{a}^{+}(\underbrace{\hat{a}^{+}\hat{a}}_{}+1)\varphi_0 = \hat{a}^{+}(0+1)\varphi_0 = \hat{a}^{+}\varphi_0 = 1\cdot\varphi_1$$

מיחס החילוף   הערך העצמי של

← $n=1$

מסקנה: הערך העצמי של $\hat{N}$ הפועל על φ_n הוא n, כאשר $n=0,1,2\ldots$.

(ומצדיק מדוע השתמשנו בסימון $\hat{N}\varphi_n = n\varphi_n$ ולא: $\hat{N}\varphi_n = c\varphi_n$)

רמות האנרגיה המתאימות הן:

$$E_n = \langle \varphi_n | \hat{H}\varphi_n\rangle = \hbar\omega_0(n+\tfrac{1}{2}) \qquad n=0,1,2,\ldots$$

הפונקציות העצמיות של מתנד הרמוני

נעבור למשתנה חסר מימדים: $\xi \equiv \beta x$

$$\beta^2 = \frac{m\omega_0}{\hbar} = \frac{\sqrt{km}}{\hbar}$$

← ביטויים פשוטים יותר:

$$\hat{a} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}\right)}$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)}$$

ומשוואת שרדינגר בקואורדינטה ξ:

$$\hat{H}\varphi = \hbar\omega_0\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\varphi = E\varphi$$

$$\rightarrow \left(2\hat{a}^\dagger a + 1 - \frac{2E}{\hbar\omega_0}\right)\varphi = 0 \qquad 2\hat{a}^\dagger a = \left(\xi - \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \xi^2 - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 1$$

$$\rightarrow \left(\xi^2 - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{2E}{\hbar\omega_0}\right)\varphi = 0 \qquad \underline{\varphi_{\xi\xi} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega_0} - \xi^2\right)\varphi = 0}$$

מהו φ_0?

נמצא ע"י התנאי $\hat{a}\varphi_0 = 0$

והצבת הביטוי המפורש ל $\hat{a}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\varphi_0 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi} = -\xi\varphi_0 \rightarrow \frac{1}{\xi}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi} = -\varphi_0 \rightarrow \frac{\partial\varphi_0}{\partial\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)} = -\varphi_0$$

$$\rightarrow \underline{\varphi_0 = A_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_0|^2 d\xi = A_0^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi = A_0^2\sqrt{\pi} = 1 \rightarrow A_0 = \pi^{-1/4}$$

(בצורה $\varphi_0(x) = B_0 e^{-(\beta x)^2/2}$ מהצבת הפתרון →)

$$\underline{\varphi_0(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{(\beta x)^2}{2}}}$$

לסיכום

? $\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ מהן

נמצא ע"י הפעלה חוזרת של אופרטור היצירה

$$\varphi_1 = \hat{a}^+ \varphi_0 = A_1\left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi}\right) e^{-\xi^2/2} = A_1\left(\xi - \frac{(-2\xi)}{2}\right) e^{-\xi^2/2}$$

$$\varphi_1 = A_1 \cdot 2\xi e^{-\xi^2/2} \rightarrow \underline{\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\xi}{\pi^{1/4}} e^{-\xi^2/2}}$$

ובאופן כללי

$$\varphi_n = A_n\left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n e^{-\xi^2/2}$$

$$\underline{\varphi_n = A_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}}$$

$H_n(\xi)$ - פולינום הרמיט

בהפעלת $\hat{a}^+$ על φ_{n-1} נותנת את φ_n עד כדי קבוע

$$|\varphi_n\rangle = c_n \hat{a}^+ |\varphi_{n-1}\rangle$$

? c_n מה ערכו של

בהנחה ש φ_{n-1} מנורמלת נקבל:

$$1 = \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = |c_n|^2 \langle \varphi_{n-1} | \hat{a} \hat{a}^+ | \varphi_{n-1} \rangle$$

$$= |c_n|^2 \langle \varphi_{n-1} | \hat{a}^+ \hat{a} + 1 | \varphi_{n-1} \rangle = |c_n|^2 \langle \varphi_{n-1} | n-1+1 | \varphi_{n-1} \rangle$$

$$\rightarrow |c_n|^2 = \frac{1}{n} \quad \rightarrow c_n = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{i\theta}$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \leftarrow \text{נבחר } \theta = 0$$

$$|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}^+ |\varphi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a}^+ \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} \hat{a}^+ |\varphi_{n-2}\rangle\right) = \dots \leftarrow$$ ע"י חזרה חוזרת

$$\underline{|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |\varphi_0\rangle}$$

נקבל את הקשרים הבאים לפונקציות המנורמלות

$$\underline{\hat{a}^+ |\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\varphi_{n+1}\rangle} \qquad \underline{\hat{a} |\varphi_n\rangle = \sqrt{n} |\varphi_{n-1}\rangle}$$

הביטוי ל $\hat{a}|\varphi_n\rangle$ המקבל :

$$\hat{a}|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}\hat{a}^\dagger|\varphi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)|\varphi_{n-1}\rangle = \frac{(n-1+1)}{\sqrt{n}}|\varphi_{n-1}\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle$$

מהם $\langle x\rangle$ ו $\langle p\rangle$ ב φ_n כלשהו ?

$$\langle x_n\rangle = \langle\varphi_n|\hat{x}|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\langle\varphi_n|\hat{a}+\hat{a}^\dagger|\varphi_n\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\Big(\sqrt{n}\underbrace{\langle\varphi_n|\varphi_{n-1}\rangle}_{\delta_{n,n-1}=0} + \sqrt{n+1}\underbrace{\langle\varphi_n|\varphi_{n+1}\rangle}_{\delta_{n,n+1}=0}\Big)$$

$$\rightarrow \underline{\langle x_n\rangle = 0}$$ לכל φ_n

באותו אופן:

$$\langle p_n\rangle = \langle\varphi_n|\hat{p}|\varphi_n\rangle = \frac{m\omega_0}{\sqrt{2}i\beta}\langle\varphi_n|\hat{a}-\hat{a}^\dagger|\varphi_n\rangle$$

$$= \frac{m\omega_0}{\sqrt{2}i\beta}\left(\sqrt{n}\langle\varphi_n|\varphi_{n-1}\rangle - \sqrt{n+1}\langle\varphi_n|\varphi_{n+1}\rangle\right)$$

$$\rightarrow \underline{\langle p_n\rangle = 0}$$

מהם Δx ו Δp ?

$$\hat{x}^2 = \frac{1}{2\beta^2}\overbrace{(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}^{\hat{x}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) = \frac{1}{2\beta^2}(\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{1}{2\beta^2}(\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)$$

$$(\Delta x_n)^2 = \langle\varphi_n|(\hat{x}-\langle x\rangle)^2|\varphi_n\rangle = \langle\varphi_n|\hat{x}^2|\varphi_n\rangle = \frac{1}{2\beta^2}(2n+1)\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle$$

$\hat{a}^\dagger\hat{a}|\varphi_n\rangle = n|\varphi_n\rangle$

$$\rightarrow (\Delta x_n)^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{p}^2 = \frac{m^2\omega_0^2}{-2\beta^2}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)(\hat{a}-\hat{a}^\dagger) = \frac{-m^2\omega_0^2}{2\beta^2}(\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}-2\hat{a}^\dagger\hat{a}-1)$$

$$\rightarrow (\Delta p_n)^2 = \frac{m^2\omega_0^2\hbar}{\cancel{2}m\omega_0}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \underline{\Delta x_n\Delta p_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar}$$

אי הודאות המינימלית (האפשרית באופן כללי) היא ברמת היסוד.

מה הקשר בין אי הודאות הקוונטית - ΔX , לגבול המותר
בתנודה $\pm X_0$ במכניקה הקלאסית?

$$\frac{1}{2}kX_0^2 = E \qquad k = m\omega_0^2 \longrightarrow X_0^2 = \frac{2E}{m\omega_0^2}$$

עבור חלקיק עם אנרגיה נתונה $E = \hbar\omega_0(n+\frac{1}{2})$

מקבל $X_0^2 = \frac{2\hbar}{m\omega_0}(n+\frac{1}{2})$

כאשר עפ"י המכניקה הקוונטית $(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0}(n+\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \quad \underline{\Delta x = \frac{X_0}{\sqrt{2}}}$$

ובאותו אופן $\Delta p = \frac{P_0}{\sqrt{2}}$

כאשר $P_0 = \sqrt{2mE}$ - התנע המקסימלי בתנודה קלאסית

התפתחות בזמן

כיצד יתפתחו בזמן ערכי התצפית של גדלים שונים?

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \varphi_n = \sum b_n e^{-i\omega_0(n+\frac{1}{2})t} \cdot \varphi_n(x)$$

עבור אופרטור כלשהו $\hat{A}$, בזמן כלשהו t :

$$\langle A\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_m^* b_n A_{mn} e^{i(m-n)\omega_0 t}$$

$A_{mn} = \langle\varphi_m|\hat{A}|\varphi_n\rangle \leftarrow$ מקדמים שאינם תלויים בזמן, אלא בתנאי ההתחלה.

m, n - מספרים שלמים $\leftarrow$ $\langle A(t)\rangle$ "יתנודד" בתדרים שהם כפולות שלמות של ω_0 .

מהם התדרים האפשריים כאשר $\hat{A} = \hat{x}, \hat{p}$?

מכיון ש $\hat{x} \propto \hat{a}+\hat{a}^\dagger$; $\hat{p} \propto \hat{a}-\hat{a}^\dagger$

$\leftarrow$ $A_{mn} \propto \delta_{m,n\pm1}$ $\leftarrow$ $\langle x\rangle$; $\langle p\rangle$ יכילו רק את $\underline{\omega_0}$