חוקי השימור לחלקיקים טעונים ושדות אלקטרומגנטיים

שימור אנרגיה

כפי שראינו

$$W_E=\frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,d^3x \quad , \quad W_m=\frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}\,d^3x$$

האנרגיה בשדה החשמלי   האנרגיה בשדה המגנטי

האם W_E+W_M נשמר?

לא בהכרח. בנוכחות חלקיקים טעונים בצע השדה $\vec{E}$ עבודה על המטענים:

$$dw_p=\vec{F}\cdot d\vec{l}=q(\underbrace{\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}}_{\text{כוח לורנץ}})\cdot\vec{v}\,dt=q\vec{E}\cdot\vec{v}\,dt$$

השינוי באנרגיית החלקיק עם מטען q -

ומכיוון ש- $dq=\rho\, d^3x$, $\rho\vec{v}=\vec{J}$

$$\to \frac{dw_p}{dt}=\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,d^3x$$

ההספק הנמסר לחלקיקים בנפח V (אנרגיה קינטית מסודרת + אקראית)

האם $W_p+W_E+W_M$ נשמר בנפח סופי V?

לא! השדות $\vec{E}$ ו- $\vec{B}$ יכולים להסיע אנרגיה ממקום למקום. בקיצור טריוויאלי, אבל נוכיח זאת רק על סמך משוואות מקסוול ובלי להשתמש בפתרונות המתאימים גלים א"מ.

נבטא את W_p רק באמצעות השדות.

$$\vec{J}=\vec{\nabla}\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\to\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,d^3x=\int_V\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right]d^3x$$

נשתמש בזהות הוקטורים

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})$$

ובחוק פרדי

ונקבל

$$\int_V \vec E\cdot\vec J\, d^3x = -\int_V\left[\nabla\cdot(\vec E\times\vec H)+\vec E\cdot\frac{\partial\vec D}{\partial t}+\vec H\cdot\frac{\partial\vec B}{\partial t}\right]d^3x$$

נניח שהחומר בו השדות נמצאים הוא ליניארי בתכונותיו החשמליות והמגנטיות

צפיפות האנרגיה של השדה הא"מ - $u=\frac{1}{2}(\vec E\cdot\vec D+\vec B\cdot\vec H)$ ← ($\vec D = \varepsilon E$, $\vec H = B/\mu$)

$$\frac{\partial(\vec E\cdot\vec D)}{\partial t}=\vec D\cdot\frac{\partial\vec E}{\partial t}+\vec E\cdot\frac{\partial\vec D}{\partial t}=2\varepsilon\,\vec E\cdot\frac{\partial\vec E}{\partial t}$$

$$\rightarrow\quad -\int_V\vec E\cdot\vec J\,d^3x=\int_V\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot(\vec E\times\vec H)\right]d^3x$$

ומכיון שהשוויון נכון לכל V, נקבל

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\vec S=-\vec J\cdot\vec E$$

השינוי באנרגית השדה

השינוי באנרגית השדה כתוצאה מעבודה של מקור השדה

$\underline{\vec S\equiv\vec E\times\vec H}$ - וקטור פוינטינג (Poynting vector)

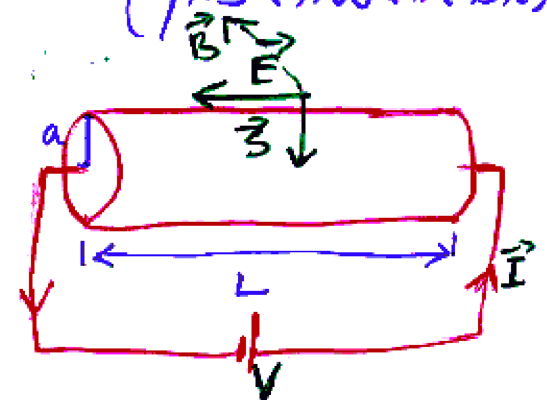
($u=\frac{\epsilon_0}{2}(E^2+\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}B^2)=\frac{\epsilon_0}{2}(E^2+c^2B^2)$ בריק)

מה מציג $\vec S$?

$$\frac{dE_{mech}}{dt}=\int_V\vec J\cdot\vec E\,d^3x\quad,\quad\frac{dE_{field}}{dt}=\int_V u\,d^3x$$

$$\rightarrow\quad\frac{d}{dt}\underbrace{(E_{mech}+E_{field})}_{\text{השינוי באנרגית החלקיקים + השדות}}=-\oint_S\vec S\cdot\hat n\,da$$ ← הספק האנרגיה היוצא מ V

← $\vec S$ - שטף האנרגיה של השדה הא"מ (אנרגיה\שטח\זמן)



<u>דוגמא פשוטה מאוד</u>

$E=\frac{V}{L}$ - השדה החשמלי בגוף אחיד באורך L

$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}=\mu_0 H$ - השדה המגנטי על פני הגוף

← $S=\frac{V\cdot I}{2\pi a L}$ ← הספק הנכנס לגוף $-\oint\vec S\cdot d\vec a=VI-$ הספק הגוף

שימור תנע

מהו שטף התנע של השדה האלקטרומגנטי?

נחשב באופן דומה לחישוב הקודם.

הכוח על חלקיק טעון:

$$\vec F = q(\vec E + \vec v\times\vec B)$$

סה"כ הכוח על המטענים בנפח V:

$$\rightarrow \quad \frac{d\vec P_{mech}}{dt} = \int_V \rho(\vec E + \vec v\times\vec B)\,d^3x = \int_V (\rho\vec E + \vec J\times\vec B)\,d^3x$$

וכמו בחישוב הקודם נעבור מביטוי התלוי ב $\rho, \vec J$ לביטוי התלוי בשדות בלבד.

נשתמש במשוואות מקסוול (למקורות בריק)

$$\rho = \epsilon_0 \nabla\cdot\vec E \quad , \quad \vec J = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec B - \epsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}$$

$$\rightarrow \quad \rho\vec E + \vec J\times\vec B = \epsilon_0\left[\vec E(\nabla\cdot\vec E) + \vec B\times\frac{\partial\vec E}{\partial t} - c^2\vec B\times\nabla\times\vec B\right]$$

נשתמש בקשר

$$\vec B\times\frac{\partial\vec E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec E\times\vec B) + \vec E\times\underbrace{\frac{\partial\vec B}{\partial t}}_{=-\nabla\times\vec E}$$

לאיזון הביטוי נוסיף גם $c^2\vec B(\nabla\cdot\vec B) = 0$, ונקבל

$$\rho\vec E + \vec J\times\vec B = \epsilon_0\left[\vec E(\nabla\cdot\vec E) + c^2\vec B(\nabla\cdot\vec B) - \vec E\times(\nabla\times\vec E) - c^2\vec B\times(\nabla\times\vec B)\right] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec E\times\vec B)$$

נציב חזרה בביטוי לאינטגרל

$$\frac{d\vec P_{mech}}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V \epsilon_0(\vec E\times\vec B)\,d^3x = \epsilon_0\int_V [\qquad]\,d^3x$$

את אגף ימין נהפוך (עוד מעט) לאינטגרל משטחי של שטף התנע. ולכן נוכל לזהות את התנע של השדה

$$\vec{P}_{field} = \varepsilon_0 \int_V \vec{E}\times\vec{B}\, d^3x = \mu_0\varepsilon_0 \int_V \vec{E}\times\vec{H}\, d^3x$$

$$\rightarrow \vec{P}_{field} = \frac{1}{c^2}\int \vec{S}\, d^3x$$ — מכללת התנע של השדה

את אגף ימין נרצה שנוכל לרשום כ: $\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}$ טנזור (מקסוול)

נקבל הסימטריה בין $\vec{E}$ ל $\vec{B}$ (הגזור לזמנים) באגף ימין, נתייחס במפורש רק ל $\vec{E}$. נרשום את רכיב $\hat{x}$ של האיברים התלויים ב: $\vec{E}$

$$\left[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right]_x = E_x\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) - E_y\underbrace{\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)}_{(\vec{\nabla}\times\vec{E})_z} + E_z\underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)}_{(\vec{\nabla}\times\vec{E})_y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(E_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(E_xE_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_xE_z) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(E_x^2+E_y^2+E_z^2)$$

או באופן כללי

$$\left[\vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right]_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{E}\cdot\vec{E}\right)$$

כאשר $i,j=1,2,3$ מסמנים את רכיבי $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$

כלומר אגף ימין הוא $\vec{\nabla}\cdot$ הפועל על טנזור

Maxwell stress tensor $\rightarrow$ $$T_{ij} = \varepsilon_0\left[E_iE_j + c^2B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{E}\cdot\vec{E} + c^2\vec{B}\cdot\vec{B}\right)\right]$$

רכיב i של משוואת שימור התנע הוא

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{mech}+\vec{P}_{field}\right)_i = \sum_j\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}T_{ij}\, d^3x$$

ועם משפט הדיברגנס נקבל

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{mech}+\vec{P}_{field}\right) = \int_S \overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n}\, da$$

משטח ניצב

כאשר $(\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n})_i = \sum_{j=1}^{3}T_{ij}\cdot n_j$

מסקנה: $\hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T}$ - שטף התנע של השדה הא"מ בכיוון $\hat{n}$

שטף התנע ≡ תנע \ יחידת זמן \ יחידת שטח = כח \ יחידת שטח = לחץ

המשמעות הפיזיקלית: T_{ij} - הכוח \ יחידת שטח בכיוון i הפועל על אלמנט שטח בכיוון j

← T_{ii} - רכיבי לחץ הקרינה הא"מ - הכח ניצב לפני השטח

$i\neq j$ T_{ij} - רכיבי הגזירה T_{xy} - הכח בכיוון $\hat{x}$ הפועל על אלמנט שטח בכיוון $\hat{y}$ (הכח מקביל לפני השטח)

בניסוח הדיפרנציאלי:

$$\frac{d}{dt}\Big(\vec{P}_{mech}+\underbrace{\vec{P}_{field}}_{\frac{1}{c^2}\vec{S}}\Big)=\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

התנע ליחידת נפח

אז הכוח \ יחידת נפח המופעל ע"י השדות:

$$\vec{f}=\frac{d\vec{P}_{mech}}{dt}=\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{1}{c^2}\frac{d\vec{S}}{dt}$$

דוגמא בשיטה לשימוש (מיותר) ב $\overleftrightarrow{T}$

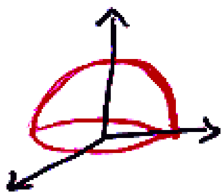
נתון כדור ברדיוס R עם התפלגות נפחית אחידה של מטען Q
מהו הכוח על החצי העליון של הכדור?

השדות במרחב הם:

$$\left.\begin{array}{ll}\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} & - \; r>R \\ \vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}\vec{r} & - \; r<R\end{array}\right\}\vec{B}=0$$

← $\vec{P}_{field}\propto\vec{S}=0$ ולכן

$$\vec{F}=\int_V\vec{f}\,d^3x=\int_S\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n}\,da$$



S - המשטח העוטף את חצי הכדור העליון

כיפה - $r=R$, $\frac{\pi}{2}\geq\theta\geq0$, $2\pi\geq\varphi\geq0$

+ משטח - $r\leq R$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $2\pi\geq\varphi\geq0$

בגלל השיקול הנ"ל בכיוון $\hat{z}$ משיקולי סימטריה
ולכן צריך למצוא רק את

$$(\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n})_z = T_{zx}n_x + T_{zy}n_y + T_{zz}n_z$$

נחשב עבור
<u>כובי השפה על הכיפה</u>

$$\hat{n} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x},\ \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y},\ \cos\theta\,\hat{z}$$

$$T_{zx} = \varepsilon_0 E_z E_x = \varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \cos\theta\sin\theta\cos\varphi$$

$$T_{zy} = \varepsilon_0 E_z E_y = \varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 \cos\theta\sin\theta\sin\varphi$$

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\rightarrow\ (\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n})_z = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2\cos\theta$$

הכוח הכולל על הכיפה בכיוון z הוא

$$F_{\triangle} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2\cdot R^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot\sin\theta\, d\theta$$

$$(da = R^2 d\varphi\sin\theta\, d\theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{8R^2}$$

<u>על המשטח התחתון</u>

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y})$$

$$\vec{E}_z = 0 \quad\rightarrow\quad (\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n})_z = T_{zz}n_z \qquad (T_{zx} = T_{zy} = 0)$$

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2\cdot r^2$$

$$(da = r\,dr\,d\varphi)$$

בכיוון $-\hat{z}$

$$F_{\circ} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{R} r^3\, dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{16R^2}$$

$$\rightarrow\ F = F_{\triangle} + F_{\circ} = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3Q^2}{16R^2}}$$

$$d\vec{f} = \vec{E}\cdot dq = \vec{E}\,s\,dv,\ \int d\vec{f}$$

אותה תוצאה מתקבלת מהחישוב הישיר של
בלי להשתמש ב $\overleftrightarrow{T}$ (למשל צורת בעיה פשוטה <u>באלקטרוסטטיקה</u>)

שימור תנע זויתי

מכיון ש $\vec{p}_{em} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$ - התנע \ יחידת נפח בשדה הא"מ

נקבל ש $\vec{\ell}_{em} = \vec{r}\times\vec{p}_{em}$ - התנ"ז \ יחידת נפח בשדה הא"מ

$$= \frac{1}{c^2}\vec{r}\times\vec{S}$$

$$= \frac{1}{c^2}\vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{H})$$

! $\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{T}\times\vec{r}$ - שטף התנע הזויתי

ומשוואת השימור שמתקבלת היא

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\vec{\ell}_{mech} + \vec{\ell}_{em}\right)d^3x + \int_S \hat{n}\cdot\overleftrightarrow{M}\,da = 0$$

או

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\ell}_{mech} + \vec{\ell}_{em}\right) + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{M} = 0$$