משוואות מקסוול

מה היה לנו?

<u>חוק קולון</u>: $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$

<u>חוק אמפר</u>: $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$

<u>חוק פרדי</u>: $\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$

<u>העדר מונופולים מגנטיים</u>: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

+ תנאי שפה ← השדות $\vec{B},\vec{E}$

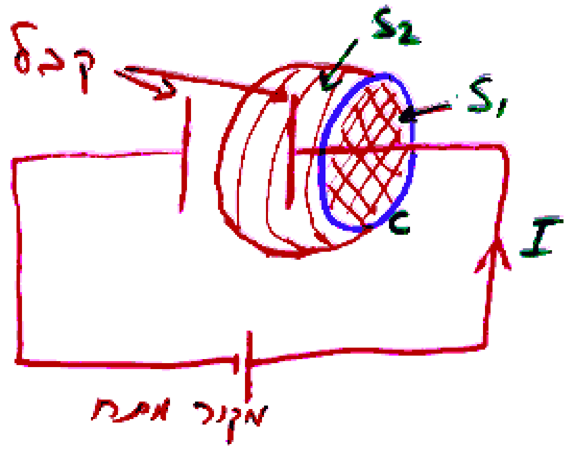
+ כוח לורנץ $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ ← דינמיקת מטענים

אבל חוק אמפר סותר את משוואת רציפות המטען $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

על מבחינה, נכון למגנטוסטטיקה

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})=0$$

לכל שדה וקטורי



<u>דוגמא</u>:

מקור מתח מחובר לקבל וטוען

אותו זרם I.

עפ"י חוק אמפר

$$\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\hat{n}\,da=\int_S\vec{J}\cdot\hat{n}\,da=I - \text{הזרם החוצה את } S$$

ועפ"י חוק סטוקס $\underbrace{\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\hat{n}\,da}_{}=\underbrace{\oint_S\vec{H}\cdot d\vec{l}}_{}$

ברור ש <u>מוגדר חד ערכית</u>, אבל יוצא I עפ"י חוק אמפר ל $S=S_1$

0 " " " " $S=S_2$!

<u>הסבר</u>: מטען מצטבר על לוחות הקבל

כלומר אין רציפות בזרם $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\neq 0$! $\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$ - על לוחות הקבל

איך נתקן את חוק אמפר לחוק כללי יותר שנכון גם

עבור $\vec{J}=\vec{J}(t)$?

בשנת 1865 הציע James Clerk Maxwell

תיקון קטן לחוק אמפר

להוסיף ל $\vec{J}$ את $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - "זרם ההעתקה"

Displacement current

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

כעת מתקיימת משוואת הרציפות

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})=\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

המשמעות הפיזיקלית: <u>שדה חשמלי משתנה בזמן יוצר שדה מגנטי!</u>

לתיקון הקטן משמעות עצומה

(← 4 המשוואות נקראות משוואות מקסוול)

<u>בוואקום, וללא מקורות</u> $\vec{J}=\rho=0$, $\frac{\vec{D}}{\epsilon_0}=\vec{E}$ $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}$

משוואות מקסוול הופכות:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

נפעיל את $\vec{\nabla}\times$ על המשוואות בצד ימין

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

מצד שני

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}=-\nabla^2 B$$

וסה"כ נקבל

$$\vec{\nabla}^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad , \quad \vec{\nabla}^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

כלומר קיבלנו

<u>משוואות גלים</u>

← כל השתנות בזמן של $\vec{E}$ או $\vec{B}$ תיצור גל הנע במהירות

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}=c$$

מקסוול ניבא קיום <u>גלים אלקטרומגנטיים</u> (הוכח נסיונית ע"י הרץ ב 1888)

נחזור לקודמים

מביא תוצאת האינטגרל על S_2 בנוכחות זרם התיקון ?

עבור S_1 קיבלנו $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I$

עבור S_2 נקבל $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \hat{n}\, da$

$\vec{D}\neq 0$ רק בין לוחות הקבל

בקירוב של קבל אינסופי:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A}$$

המטען על כל לוח

שטח הלוחות

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{I}{A} \longrightarrow \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \hat{n}\, da = I\int \frac{\hat{n}\,da}{A} = \underline{I}$$

כלומר זרם ההעתקה בין לוחות הקבל = זרם ה"אמיתי" בחוטים.

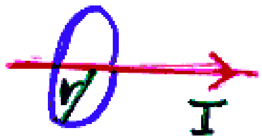
מדוע לא התגלה זרם ההעתקה באופן ניסיוני ?

אם $I = I_0 \cos\omega t$ מה היחס בין $\vec{J}_0 = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ל $\vec{J}$?

(שניהם תורמים ל $\vec{H}$ שמודדו אמפר! Bio,Savart סמוך לחוט זרם)

א. נחשב את $\vec{B}$ סמוך לחוט מוליך ע"פ חוק אמפר (נזניח את $\vec{J}_0$)

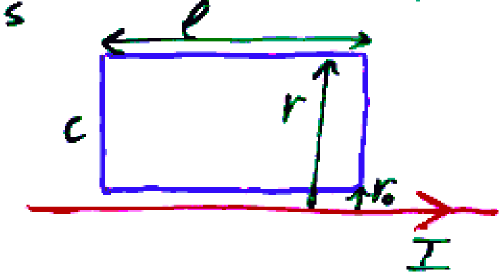
$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\hat{n}\, da = \int \vec{J}\cdot\hat{n}\, da \longrightarrow 2\pi r \frac{B_\varphi}{\mu_0} = I \qquad B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



ב. נחשב את $\vec{E}$ המושרה (במרחק r) כתוצאה מהשתנות $\vec{B}$

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}\, da = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\, da = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot\hat{n}\, da$$

מכיוון ש $\vec{B} = B\hat{\varphi}$ נבחר אינטגרל שטח במישור החוט



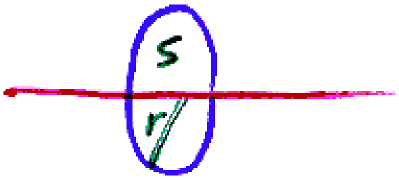
$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E(r)\cdot\ell - E(r_0)\cdot\ell$$

$$\int \vec{B}\cdot\hat{n}\, da = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r}\cdot\int_0^{\ell} dz = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$\rightarrow \vec{E}(r) = \left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + K\right]\hat{z}$$

קבוע אינטגרציה

ג. נחשב את זרם ההעתקה הנובע מהשתנות $\vec{E}$



מכיוון ש $\vec{E}=E\hat{z}$ נבחר שוב אלמנט שטח ניצב

$$I_d=\int_s \vec{J}_D\cdot\hat{n}\,da=\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{D}\cdot\hat{n}\,da=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\cdot 2\pi\underbrace{\int_0^r r'\ln\left(\frac{r'}{r_0}\right)dr'}_{\frac{r^2}{2}\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)-\frac{1}{2}\right]}$$

$$\rightarrow I_d\approx\epsilon_0\mu_0\frac{r^2}{2}\frac{d^2I}{dt^2}=\epsilon_0\mu_0\frac{r^2}{2}\omega^2 I$$

$$\rightarrow \frac{I_d}{I}\approx\epsilon_0\mu_0 r^2\omega^2=\frac{r^2\omega^2}{c^2}=\frac{r^2(2\pi f)^2}{(\lambda f)^2}=4\pi^2\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$$

בלתי ניתן למדידה

למשל: עבור $f=1kHz \leftarrow \lambda=3\cdot10^5$ מטר ובמרחק $r=1$ מטר $\frac{I_d}{I}=4\cdot10^{-10}$

עבור $r\ll\lambda$ זרם ההעתקה זניח בקביעת $\vec{B}$

במקרה זה השינוי בשדות ע"י הקרינה האלקטרומגנטית הנוצרת בהזנחה מזרם החילופין.

מטענים מגנטיים

מדוע אין סימטריה בין $\vec{E}$ ל $\vec{B}$ במשוואות מקסוול?

בצורה הסימטרית:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_e \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}_e$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\rho_m \qquad -\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{J}_m$$

לא קיימים

ניתן להבין שלא ניתן לרשום את משוואות מקסוול בצורה זו אם יש יחס קבוע $\frac{\text{מטען חשמלי}}{\text{מטען מגנטי}}$ עבור כל החלקיקים בעולם (גריפית' 6. 270
ג'קסון 7. 275)

מדוע אין חלקיקים עם יחס שונה?

דירק הבחין ש אם קיימים מונופולים (מטענים) מגנטיים אזי הקוונטיזציה של מטען חשמלי ← קוונטיזציה של מטען.

פוטנציאלים סקלריים ווקטוריים

כמו שעשינו באלקטרוסטטיקה ובמגנטוסטטיקה, ע"י שימוש (מקסוול)
בפוטנציאלים $\vec{A}, \Phi$, ניתן לעבור מארבע משוואות עבור
השדות $\vec{E}, \vec{B}$ לשתי משוואות ל $\vec{A}, \Phi$
(איינשטיין איחד בתורת היחסות הפרטית למשוואה אחת ויפה אחת)

נגדיר את $\vec{A}$ ע"י $\quad \underline{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$

אז $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

ולכן ניתן להגדיר Φ ע"י $\leftarrow \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi$

כלומר

$$\underline{\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

נניח שבמקורות $\rho, \vec{J}$ נמצאים בריק (אין חומרים דיאלקטריים ופרמיאביליים)

מחוק קולון נקבל

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \underbrace{\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

ומחוק אמפר המתוקן נקבל

$$-\mu_0\left(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \underbrace{\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J}}$$

סה"כ קיבלנו שתי משוואות (שזורות כ"ץ..)

ניתן לפשט את המשוואות ולהפריד את הצימוד ביניהן
ע"י <u>טרנספורמציות כיול</u> שאינן משנות את $\vec{E}$ ו $\vec{B}$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \qquad \Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

לבטל את התוספת ל $\vec{A}$ במשוואה ל $\vec{E}$, כי $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Psi = 0$

כלומר ניתן למצוא Λ שיקיים $\quad \underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0} \quad \leftarrow$ תנאי לורנץ

(מה המשוואה ש Λ צריך לקיים?)

← 2 משוואות גל הומוגניות ולא מצומדות

(משוואות פואסון ידועות אם $\frac{\partial}{\partial t}=0$)

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}&=-\rho/\varepsilon_0\\ \nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\vec{J}\end{aligned}}$$

קיבלנו סה"כ ניסוח פשוט יותר למשוואות השדה. ($\square^2\equiv\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ - דלמברטיאן, הכללה של ∇^2)

(נוח לעבודה בניסוח קווריאנטי = אלקטרודינמיקה + יחסות פרטית)

באיזה תנאי ניתן לבצע את כיול לורנץ ?

נניח ש $\vec{A},\Phi$ לא מקיימים את תנאי לורנץ ← $\vec\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=f(\vec{x},t)$

נבצע טרנספורמצית כיול ל $\Phi'=\Phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$, $\vec{A}'=\vec{A}+\vec\nabla\Lambda$

מהו התנאי על Λ על מנת ש $\vec{A}',\Phi'$ יקיימו את תנאי לורנץ ?

נבדוק:

$$\vec\nabla\cdot\vec{A}'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=0=\vec\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}$$

← התנאי על Λ

$$\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=-f(\vec{x},t)$$

באיזה הפתרונות ל $\vec{A},\Phi$ בכיול לורנץ (כאמור המקיימים את התנאי) מוגדרים חד ערכית ?

לא. אם הפתרונות $\vec{A}',\Phi'$ יקיימו את תנאי לורנץ בתנאי שבמקרה Λ המקיים $\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=0$

כלומר כיול לורנץ מגדיר משפחת פוטנציאלים המתארים את אותו פתרון מסוים של $\vec{E},\vec{B}$.

(הלורנץ הנכון ← L.V. Lorenz (דני)

הטרנספורמציות המקובלות ← H.A. Lorentz (הולנדי)

עי' ג'קסון ע' 294)

כיול קולון

$$\vec\nabla\cdot\vec A=0$$

בכיול זה מקבלים משוואה פשוטה ל Φ $\qquad \nabla^2\Phi=-\rho/\varepsilon_0$

שפתרונה ידוע $\qquad \Phi(\vec x,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec x',t)}{|\vec x-\vec x'|}d^3x'$

(אבל בניגוד לאלקטרוסטטיקה כאן $\vec E\neq-\vec\nabla\Phi$ אלא, $E=-\vec\nabla\Phi-\frac{\partial\vec A}{\partial t}$)

ו"התשלום" הוא במשוואה מסובכת יותר ל $\vec A$

$$\nabla^2\vec A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}=-\mu_0\vec J+\frac{1}{c^2}\vec\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

ניתן לפשט משוואה זו באופן הבא:
נזכיר שניתן לפרקם $\qquad \vec J=\vec J_\ell+\vec J_t$

כאשר

$$\vec J_\ell\equiv-\frac{1}{4\pi}\vec\nabla\int\frac{\vec\nabla'\cdot\vec J}{|\vec x-\vec x'|}d^3x' \quad , \quad \vec J_t=\vec\nabla\times\left[\vec\nabla\times\int\frac{\vec J\,d^3x'}{|\vec x-\vec x'|}\right]$$

רכיב "רוחבי" המקיים $\vec\nabla\cdot\vec J_t=0$, רכיב "אורכי" המקיים $\vec\nabla\times\vec J_\ell=0$

הוכחה:

נשתמש בזהות $\qquad \vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec a)=\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec a)-\nabla^2\vec a$

עבור הביטוי ל $\vec J_t$ ונקבל לכן (לאחר צמצום האיברים $\vec\nabla/\vec\nabla\cdot\vec J\ldots$)

$$\vec J_\ell+\vec J_t=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int\frac{\vec J\,d^3x'}{|\vec x-\vec x'|}=-\frac{1}{4\pi}\int\vec J(\vec x')\underbrace{\nabla^2\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}}_{-4\pi\delta(\vec x-\vec x')}d^3x'=\vec J(\vec x)$$

כעת נראה ש $\mu_0\vec J_\ell=\frac{1}{c^2}\vec\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, נשתמש במשוואת הרציפות

$$\vec\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec\nabla\int\frac{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec x',t)}{|\vec x-\vec x'|}d^3x'=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\vec\nabla\int\frac{\vec\nabla'\cdot\vec J(\vec x',t)}{|\vec x-\vec x'|}d^3x'=\frac{\vec J_\ell}{\varepsilon_0}$$

ומכיוון ש $c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$ נקבל את הזהות

כלומר, נקבל סה"כ

$$\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}+\mu_0\vec{J}_e=-\mu_0\vec{J}_t$$

לכן כיול קולון נקרא גם "כיול רוחבי"

לדוגמא:

נניח $\vec{A}(\vec{x},t)=\vec{A}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ – גל מישורי

אזי התנאי $\nabla\cdot\vec{A}=0$ של כיול קולון ← $\vec{A}_0\cdot\vec{k}=0$

כלומר תנודת הגל הנו בניצב לכיוון ההתקדמות = גל רוחבי

פתרון המשוואות בכיול לורנץ

המשוואות ל $\vec{A}$ ו Φ הן מהצורה הכללית

$$\Box^2\psi=\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-4\pi f(\vec{x},t)$$

ניתן להראות שאם נמצא פתרון למשוואה הפשוטה יותר

$$\Box^2G(\vec{x},t,\vec{x}',t')=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta(t-t')$$

אזי הפתרון הכללי ל ψ עבור f כלשהו נתון ע"י

$$\psi(\vec{x},t)=\iint G(\vec{x},t,\vec{x}',t')f(\vec{x}',t')\,d^3x'\,dt'$$

כאשר G - פונקצית גרין! הפתרון קיים לכל $\vec{x},t$ אין תנאי שפה.

הפתרון ל G הנו

Retarded solution

Advanced solution

$$G^{\pm}=\frac{\delta\left(t'-\left[t\mp\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right]\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

נתעלם מ G^- – מייצג השפעות העתיד על העבר (למה בעצם? אפשרי?)

והפתרון ל ψ הנו

$$\psi(\vec{x},t)=\int\frac{[f(\vec{x}',t')]_{retarded}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

לדוגמא, התרומה של $\rho(\vec{x}',t')$ ל $\Phi(\vec{x},t)$ הופקה בזמן מוקדם יותר $\Delta t=t-t'=\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$

ה"מידע" על שינוי במקורות מתפשט ע' בזמן סופי c.