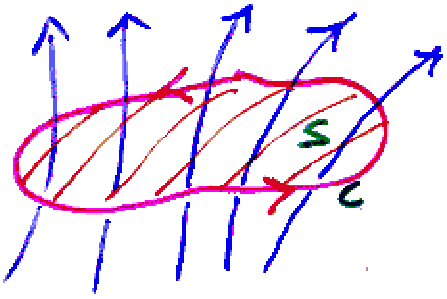
חוק ההשראה של פרדי (Faraday)



נגדיר: $F \equiv \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,da$ - השטף המגנטי דרך לולאת הזרם C

"פרדוקס" - לפי משפט גאוס

$$\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,da = \int_V \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{=0}\,dv = 0$$

אבל ברור ש- $F \neq 0$, מה קורה פה?

מסקנה: F תלוי רק בצורת הלולאה C ובה"ת בצורת המשטח S.

נגדיר: $\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{E}'\cdot d\vec{l}$ - כוח אלקטרומניע (כא"מ)

העבודה ליחידת מטען בתנועה במסלול סגור

באלקטרוסטטיקה $\mathcal{E}=0$ (מדוע?)

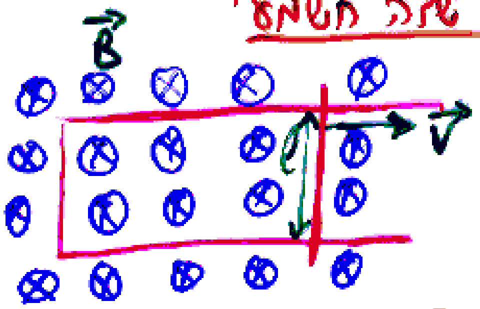
חוק ההשראה של פרדי:

$$\mathcal{E} = -k\frac{dF}{dt}$$

חוק לנץ

שטף מגנטי משתנה יוצר זרם ⟵ 'יוצר שדה חשמלי'

דוגמא 1



$$\frac{dF}{dt} = Bl\cdot v$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = -kBlv$$

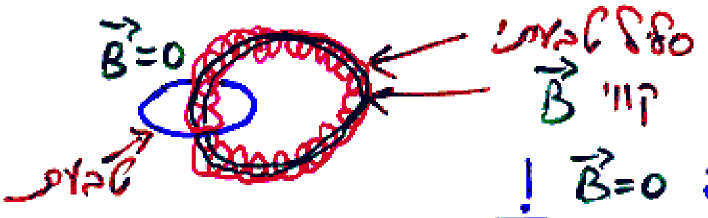
אבל כבר (פיזיקה 2 מא) נקבל בדיוק אותה עבודה ליחידת מטען עבור המוטה כנגד כח לורנץ

$$F = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\frac{W}{q} = \frac{F}{q}\cdot l = vBl$$

מדוע להבין שנוצר שדה חשמלי? (להסביר את הזרם)

דוגמא 2



אם משנה את הזרם בסליל ← זרם מושרה בטבעת

למרות שהטבעת נמצאת ב- $\vec{B}=0$!

מסקנה: חוק ההשראה של פרדי לא נובע מכוח לורנץ

אלא: שדה מגנטי משתנה יוצר שדה חשמלי (מקסוול! גם ההפך)

מה ערכו של k ?

אין צורך לנחש? ניסיונית. ניתן לקבלו משיקול תיאורטי.

חוקי הפיזיקה לא משתנים תחת טרנספורמציות מהירות

Galilean invariance (למשל טרנס' לורנץ - covariance)

$\vec{E}'$ – השדה במערכת המנוחה של הלולאה

חוק פרדי:
$$\oint_c \vec{E}'\cdot d\vec{l} = -k\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot\hat{n}\,da$$

נגזרת מלאה – $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$

תלות מפורשת בזמן

~~בזמן~~ תלות המערכת בלולאה מתנועה + השתנות במקום

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \leftarrow$$

נשתמש בזהות הוקטורית ל- $\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ כאשר $\vec{a}=\vec{B},\ \vec{b}=\vec{v}$ וקטור קבוע

ונקבל

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v}) + \vec{v}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{=0}$$

נשתמש במשפט סטוקס, ונקבל

$$\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot\hat{n}\,da = \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da + \oint_c (\vec{B}\times\vec{v})\cdot d\vec{l}$$

כלומר ניתן לרשום את חוק פרדי בצורה:

$$\oint_c [\vec{E}' - k(\vec{v}\times\vec{B})]\cdot d\vec{l} = -k\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da$$

מצד שני: חוק פרדי במערכת המעבדה

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -k\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da$$

$\vec{E}$ – השדה במערכת המעבדה

ומכיון שהכוח המושרה זהה בשתי מערכות הייחוס, נקבל

$$\vec{E}' = \vec{E} + k(\vec{v}\times\vec{B})$$

מכאן שני טרנספורמציות גלילי ישירות ל $\vec{E}$ ו $\vec{B}$ נותנות (בקירוב בא')

$[\vec{E}' = \gamma(\vec{E}+\vec{\beta}\times\vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})]$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}$$

$\leftarrow$ $k=1$ (או $\frac{1}{c}$ ביחידות גאוסיניות).

חוק פרדי הדיפרנציאלי

נשתמש במשפט סטוקס

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}\,da = -\int \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,da$$

+ חוק פרדי

לקבל

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

(משוואה מספרית)

בשדה מגנטי קבוע (מגנטוסטטיקה) $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \leftarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}=0$

האנרגיה האגורה בשדה מגנטי

באלקטרוסטטיקה האנרגיה הדרושה לבנית התפלגות מטען $\rho(\vec{x})$

$$W = \frac{1}{2}\int\rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})\,d^3x = \frac{\epsilon_0}{2}\int|\vec{E}|^2 d^3x = \frac{1}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{D}\,d^3x$$

בריק

בחומר דיאלקטרי

מהי האנרגיה הדרושה לבנית התפלגות זרם $\vec{J}(\vec{x})$?

בהזנחת התנגדות אוהמית, מדוע בכלל צריך להשקיע אנרגיה ליצור זרם ? (חוק פרדי)

כו"מ $\mathcal{E} = \frac{dw}{dq}$ עבודה ליחידת מטען עבור כל המטענים בלולאת הזרם

$$I = \frac{dq}{dt}$$

העבודה ליחידת זמן המתבצעת ע"י מקור חיצוני במעגל $\frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = I\frac{dF}{dt}$ ←

חוק לנץ

(או בדרך אחרת $\frac{dw}{dt} = -F\cdot v = -q_e E\cdot v$ - עבודה \ יחידת זמן \ אלקטרון

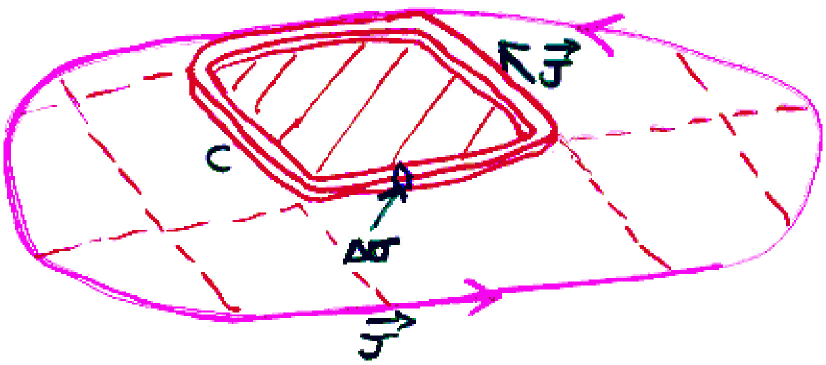
$\frac{dW}{dt} = -\frac{dw}{dt}\cdot N_e = -\int \frac{dw}{dt}\cdot n_e \cdot A\, dl$ - הספק \ סה"כ המטען הנע

$\rightarrow \frac{dW}{dt} = -q_e n_e A v \int E\cdot dl = -I\mathcal{E}$)

ולכן $\delta W = I\,\delta F$ ← שינוי השטף המגנטי - העבודה הנדרשת

נניח את <u>הקירוב הקוואזיסטטי</u> — הזרם משתנה בזמן אבל לאט ולכן מקרבים שוב (כרגיל) $\vec\nabla\cdot\vec J = 0$, ומשוואות המגנטוסטטיקה עדיין תקפות.

באלקטרוסטטיקה בנינו התפלגות מטען $\rho(\vec x)$ מאוסף מטענים מיקרוסקופיים,
<u>מהו המקביל המגנטי עבור התפלגות זרם?</u>



נתאר את $\vec J(\vec x)$ כאוסף של לולאות זרם מיקרוסקופיות עם שטח S וחתך $\Delta\sigma$

$\Delta(\delta W) = \underbrace{J\Delta\sigma}_{I} \int_S \underbrace{\hat n\cdot\delta\vec B\, da}_{\delta F}$ — העבודה עבור לולאה מיקרוסקופית אחת

או במונחים של $\vec A$:

$$= J\Delta\sigma \int_S (\vec\nabla\times\delta\vec A)\cdot\hat n\, da$$

נשתמש במשפט סטוקס לקבל

$$\Delta(\delta W) = J\Delta\sigma \oint_C \delta\vec{A}\cdot d\vec{l} = \int \delta\vec{A}\cdot\underbrace{\vec{J}\,d^3x}_{=J\Delta\sigma\, d\vec{l}}$$

ואם נסכם על כל הלולאות המיקרוסקופיות נקבל

$$\delta W = \int \delta\vec{A}\cdot\vec{J}\,d^3x$$

מה ההבדל ? $\vec{B}$ ו $\vec{H}$?

$$\delta W = \int \delta\vec{A}\cdot(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{H}}_{\vec{J}})\,d^3x$$

נשתמש בזהות
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})$$
לקבל

$$\delta W = \int\left[\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\delta\vec{A}) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{H}\times\delta\vec{A})\right]d^3x$$

את האבר השני נהפוך ל $\int_A (\vec{H}\times\delta\vec{A})\cdot\hat{n}\,da = 0$ עבור התפלגות זרם בנפח סופי

$$\rightarrow \quad \delta W = \int \vec{H}\cdot\delta\vec{B}\,d^3x \qquad \delta\vec{B} = \vec{\nabla}\times\delta\vec{A}$$

אנלוגי ל $\delta W = \int \vec{E}\cdot\delta\vec{D}\,d^3x$ באלקטרוסטטיקה (ע. 66)

אם יש קשר ליניארי בין $\vec{H}$ ו $\vec{B}$ (חומר פארמגנטי או דיאמגנטי)

$$\vec{H}\cdot\delta\vec{B} = \frac{1}{2}\delta(\vec{H}\cdot\vec{B})$$

$\leftarrow$ $\boxed{W = \frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}\,d^3x}$ – האנרגיה הדרושה להעלות את $\vec{B}$ ו $\vec{H}$ מאפס לערכן הנוכחי.

אנלוגי ל $W = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,d^3x$ באלקטרוסטטיקה

ובאופן אנלוגי ניתן להראות ש $\boxed{W = \frac{1}{2}\int \vec{J}\cdot\vec{A}\,d^3x}$!

אנלוגי ל $W = \frac{1}{2}\int \rho\Phi\,d^3x$ באלקטרוסטטיקה.

! $W = \frac{1}{2}\int_V \vec{M}\cdot\vec{B}_0\,d^3x$ שינוי אנרגיה בשדה בתוצאה מהכנסת גוף עם $\vec{M}\neq 0$

אנלוגי ל $W = -\frac{1}{2}\int \vec{P}\cdot\vec{E}_0\,d^3x$

השראה עצמית והשראה הדדית

מקדמי ההשראה - הקשר בין הזרם לאנרגיה האגורה בשדה המגנטי
אנלוגי למקדמי הקיבול - " " המתח " " " החשמלי

עבור מערכת של N מעגלי זרם הנושאים זרם I_i $i=1...N$
נראה שניתן לרשום את האנרגיה המגנטית הכוללת?

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} L_i I_i^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N} M_{ij}I_iI_j$$

מקדם ההשראה העצמית של מעגל i

מקדם ההשראה ההדדית בין מעגל i ל j.

הוכחה

$$W=\frac{1}{2}\int \vec{J}\cdot\vec{A}\,d^3x=\frac{\mu_0}{8\pi}\int d^3x\int d^3x'\,\frac{\vec{J}(\vec{x})\cdot\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

נציב את הביטוי של $\vec{A}$

מכיוון ש $\vec{J}$ מוגבל לכל אחד של N התפלגויות זרם, נקבל

$$W=\frac{\mu_0}{8\pi}\sum_{i=1}^{N}\int d^3x_i\sum_{j=1}^{N}\int d^3x_j\,\frac{\vec{J}(\vec{x}_i)\cdot\vec{J}(\vec{x}_j)}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|}$$

עבור $j=i$ נקבל את הגדרת L_i

$$L_i\equiv\frac{\mu_0}{4\pi I_i^2}\int_{C_i}d^3x_i\int_{C_i}d^3x_i'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}_i)\cdot\vec{J}(\vec{x}_i')}{|\vec{x}_i-\vec{x}_i'|}$$

ועבור $j\neq i$ נקבל את הגדרת M_{ij}

$$M_{ij}=\frac{\mu_0}{4\pi I_iI_j}\int_{C_i}d^3x_i\int_{C_j}d^3x_j'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}_i)\cdot\vec{J}(\vec{x}_j)}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|}\longrightarrow M_{ij}=M_{ji}$$

מה הקשר לשטף המגנטי?

$$M_{ij}=\frac{1}{I_iI_j}\int d^3x_i\,\vec{J}(\vec{x}_i)\cdot\underline{\vec{A}_j(\vec{x}_i)}$$

הכוונה לפוטנציאל המגנטי ב $\vec{x}_i$ כתוצאה מלולאה j

$$=\frac{1}{I_iI_j}I_i\oint_{C_i}\vec{A}_{ij}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{I_j}\int_{S_i}\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A}_{ij})}_{=\vec{B}_{ij}}\cdot\hat{n}\,da$$

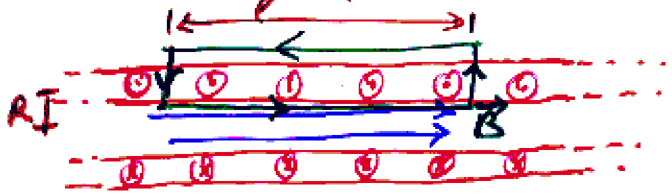
$$\rightarrow\boxed{M_{ij}=\frac{1}{I_j}F_{ij}}$$

השטף המגנטי שעובר בלולאה i ונוצר בלולאה j

דוגמאות פשוטות

מהו מקדם ההשראה העצמית של סליל?

א. נחשב את השדה בסליל ע"י משפט סטוקס וחוק אמפר



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \cdot N$$

הזרם בסליל

מספר הליפופים באורך סליל l

$$B\cdot l = \mu_0 I\cdot N$$

השדה בתוך הסליל אחיד (מחוק סטוקס) $\rightarrow$ $\underline{B=\mu_0 I\cdot n}$ $\leftarrow$ ליפופים ליחידת אורך

$$W=\frac{1}{2}\mu_0\int \vec{B}^2 d^3x \;\leftarrow\; \mu_0\vec{H}=\vec{B}$$

מכיוון שבסליל ריק

ועבור קטע סליל באורך l

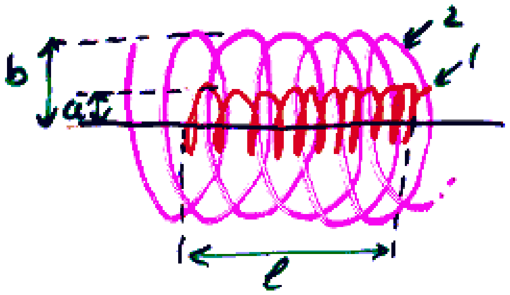
$$W=\frac{1}{2}\mu_0 B^2\cdot \pi R^2\cdot l$$

רדיוס בסליל

$$W=\frac{1}{2}\mu_0^3 I^2 n^2\pi R^2 l$$ — האנרגיה המגנטית האגורה בסליל ברדיוס R באורך l

אבל, ע"י הגדרת L: $W=\frac{1}{2}LI^2 \rightarrow \underline{L=\mu_0^2 n^2\pi R^2 l}$

מהו מקדם ההשראה ההדדית של שני סלילים קונצנטריים?



$B=\mu_0 n_2 I_2$ השדה הנוצר ע"י סליל 2

$\phi_{12}=B\cdot\pi a^2$ — השטף דרך לולאה אחת של סליל 1,

$\Phi_{12}=n_1\cdot l\cdot \phi_{12}$ — השטף הכולל דרך סליל 1.

$$\rightarrow M_{12}=\frac{\Phi_{12}}{I_2}=n_1 l\pi a^2\mu_0 n_2$$

חישוב ישיר של M_{21} מסובך מאוד

אבל, מההגדרה M_{ij} ברור ש $M_{21}=M_{12}$

מקדמי ההשראה תלויים בגיאומטריה בלבד (כמו C_{ij} באלקטרוסטטיקה)

הקשר בין מקדמי ההשראה והכא"מ המושרה

הכא"מ המושרה בלולאה i — $\mathcal{E}_{ij} = -\frac{dF_{ij}}{dt}$

כתוצאה משינוי השטף המיוצר ע"י לולאה j

$$\mathcal{E}_{ij} = -\frac{d}{dt}(I_j M_{ij})$$

אם הגאומטריה קבועה: $\mathcal{E}_{ij} = -M_{ij}\frac{dI_j}{dt}$ אז $\mathcal{E}_{ij} = -I_j\frac{dM_{ij}}{dt}$

ובאופן דומה: $\mathcal{E}_{ii} = -L_i\frac{dI_i}{dt}$ $\mathcal{E}_{ii} = -I_i\frac{dL_i}{dt}$

אם הגאומטריה משתנה (= מקדמי ההשראה)

זרם במעגל

זרם

המתנגד — $V = IR$ — מקור מתח חיצוני

הכא"מ המושרה מהווה מקור מתח נוסף ← $V + \mathcal{E} = IR$

ועבור סליל בתוך מעגל, נקבל

$$V = IR + L\dot{I}$$

והפתרונות היו:

$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$, $I = \frac{V_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

$I(t=0) = I_0$, $V(t>0) = 0$ $I(t=0) = 0$, $V(t>0) = V_0$

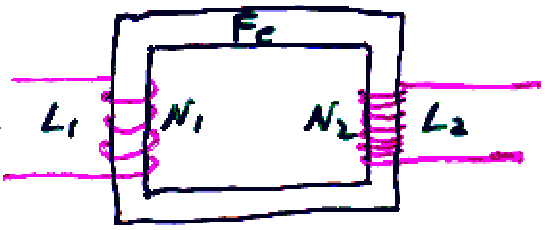
ועבור מקור מתח חילופין

$$V(t) = V_0\cos(\omega t)$$

הפתרון המתקבל

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t-\delta), \quad \delta = tg^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

שימוש נפוץ - טרנספורמטור



$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

ליבת הברזל שומרת שלא יברח השטף מהסלילים.

נמצא קשרים ש:

$\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2}$, $\frac{L_2}{M} = \frac{N_2}{N_1}$ $\longrightarrow$ $M_{12} = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$, $\frac{L_1}{L_2} = M^2/N_2^2$