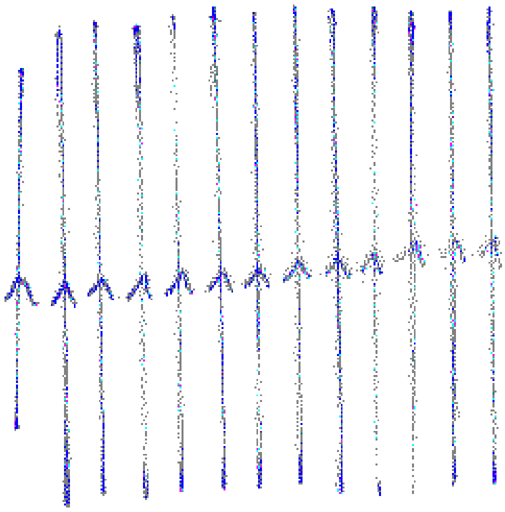
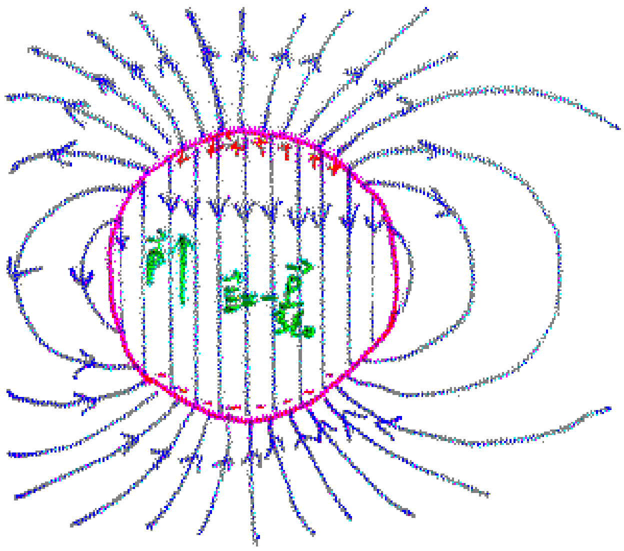
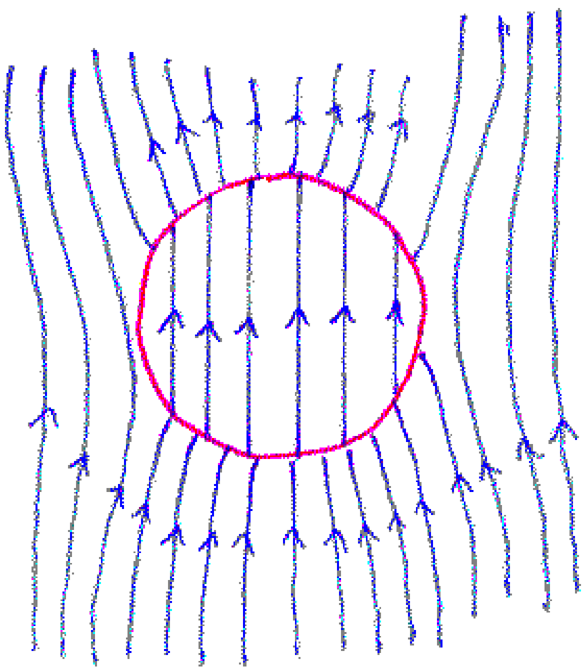


שדה
אחיד



+ שדה דיפול



= שדה כולל

מודל קלאוסיוס למציאת χ_e

(62)

הקשר בין התכונות המיקרוסקופיות:

$<\vec{p}_{mol}> = \varepsilon_0 \gamma_{mol}(\vec{E}+\vec{E}_i)$ - מומנט הדיפול הממוצע של מולקולה

γ_{mol} - קבוע התלוי בתכונות המולקולה (נמצא אותו בהמשך)

$\vec{E}$ - השדה בחומר

$\vec{E}_i$ - השדה הפנימי של המולקולה

לתכונות המאקרוסקופיות:

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ - מומנט הדיפול ליחידת נפח

כלומר $\chi_e(\gamma_{mol}) = ?$

נסמן $\vec{E}_i$ - התרומה המקומית של המולקולה לשדה במקום בו נמצאת

מדוע $\vec{E}_i \neq 0$?

$\vec{E}$ - השדה שירגיש מטען בוחן בחומר

$\vec{E}+\vec{E}_i$ - השדה במקום בו נמצאת המולקולה בחומר בלי לכלול את השדה שיוצרת המולקולה

אם נוציא את המולקולה מהחומר ו"נקפיא" את $\vec{p}_{mol}$ של שאר המולקולות מסביב אזי ב"חור" שיווצר נקבל $\vec{E}_i = \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

צפיפות מומנט הדיפול $\vec{P} = N<\vec{p}_{mol}>$

N - מספר המולקולות ליחידת נפח

$$\rightarrow \vec{P} = N\varepsilon_0 \gamma_{mol}(\vec{E}+\vec{E}_i)$$

הביטוי המיקרוסקופי:

$$= N\gamma_{mol}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\frac{\vec{P}}{3}\right)$$

והביטוי המאקרוסקופי:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\rightarrow \chi_e\varepsilon_0\vec{E} = N\gamma_{mol}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\frac{\chi_e\varepsilon_0\vec{E}}{3}\right) \rightarrow \boxed{\chi_e = \frac{N\gamma_{mol}}{1-\frac{1}{3}N\gamma_{mol}}}$$

Clausius-Mossotti eq.

$$\boxed{\gamma_{mol} = \frac{3}{N}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}+2}\right)}$$

ואם נשתמש בהגדרה $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1+\chi_e$ נקבל

מודל קלסי של γ_{mol}

הקיטוב המושרה

מהו מומנט הקיטוב שיווצר במולקולה עם $\vec{p}=0$ בהשפעת שדה חשמלי $\vec{E}$?

נניח שהמטען מצוי בפוטנציאל הרמוני (מאוד נכון כמעט תמיד? קירוב טוב?)

הכוח על המטען הקשור $\to \vec{F} = -m\omega_0^2\vec{x}$ ← הצבה משיווי משקל.

מסת החלקיק הטעון   תדר התנודה

$$\to \vec{x} = \frac{e\vec{E}}{m\omega_0^2}$$

ומומנט הקיטוב המושרה: $\vec{p}_{mol} = e\vec{x} = \frac{e^2}{m\omega_0^2}\vec{E}$

עפ"י ההגדרה $\gamma_{mol} = \frac{\vec{p}_{mol}}{\epsilon_0\vec{E}}$

← $\gamma_{mol} = \frac{e^2}{m\epsilon_0\omega_0^2}$ // עבור התפלגות מטענים במולקולה $\boxed{\gamma_{mol} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_j \frac{e_j^2}{m_j\omega_j^2}}$

מהו הגודל האופייני של γ ?

1. שיקולי מימדים $[\gamma] = \frac{[\vec{p}]}{[\epsilon_0\vec{E}]} = \frac{q\cdot L}{q/L^2} = L^3$ - מימדים

עבור אטומים $a \approx 2Å = 2\cdot10^{-10}m$

$$\to \gamma \approx a^3 \approx 10^{-29}m^3$$

2. נציב בביטוי של γ_{mol}

$m = 9.11\cdot10^{-31}kg$ $e = 1.6\cdot10^{-19}$

$\lambda \approx 3000Å \to \nu = \frac{c}{\lambda} = 10^{15}s^{-1} \to \omega_0 \approx 6\cdot10^{15}$

$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot9\cdot10^9} \approx 9\cdot10^{-12}$

$$\to \gamma_{mol} \approx 8\cdot10^{-29}$$

מהו הגודל האופייני של χ_e ?

בגז (STP) ← $N = 2.7\cdot10^{25}$ ← $\chi_e \approx N\gamma_{mol} \le 10^{-3}$ אויר $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1.00054$

במוצק ← $N = 10^{28}-10^{29}$ ← $\chi_e \approx 1-10$

מהי/ ההשפעה של הטמפרטורה על $\vec{p}_{mol}$?

התוצאה $\vec{p}_{mol} = \frac{e\vec{E}}{m\omega_0^2}$ התקבלה בהנחה שהמטען בשיווי משקל (= מנוחה)

נכון רק עבור $T=0$, עבור $T\neq 0$ נקבל תנודות סביב $\vec{X}_0 = \frac{e\vec{E}}{m\omega_0^2}$

← תנודות ב $\vec{p}_{mol}$. מהו $\langle\vec{p}_{mol}\rangle$?

האנרגיה הכוללת של מולקולה מסויימת בחומר נתונה ע"י:

כאשר נניח $\vec{E}=E\hat{z}$

$$E_n(\vec{X},\vec{P}) = \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\vec{X}^2 - eE\underset{\text{רכיב } \hat{z} \text{ של } \vec{X}}{z}$$

תנע

ההסתברות ל E_n מסוים נתונה ע"י התפלגות בולצמן

$$f(E_n) = c\cdot e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

כאשר c - קבוע נירמול (לצורך מה?) ובהצגת התלות בנפח במרחב הפאזה

במקום לחשב על $\vec{p}_{mol}(t)$ של מולקולה נתונה, נמצע על $\vec{p}_{mol}(t_0)$ בזמן נתון (t_0) של המולקולות החומר (מיצוע זה אותו דבר?)

$$\langle\vec{p}_{mol}\rangle = \hat{z}\int d^3P\int d^3x\; c\, e^{-\frac{E_n(\vec{x},\vec{P})}{kT}}\cdot ez$$

נבצע חילוף משתנה

$$\begin{pmatrix} x' = x \\ y' = y \\ z' = z - eE/m\omega_0^2 \end{pmatrix} \qquad \vec{X}' = \vec{X} - \frac{eE}{m\omega_0^2}\hat{z}$$ — הסטיה מנקודת שיווי המשקל

בקואורדינטה זו האנרגיה הכוללת נתונה ע"י

$$E_n = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\vec{X}'^2 - \frac{e^2E^2}{2m\omega_0^2}$$ — מתנד הרמוני סביב $\vec{X}'=0$

ונקבל לכן

$$\langle\vec{p}_{mol}\rangle = \hat{z}\int d^3P\int d^3x'\left(z' + \frac{eE}{m\omega_0^2}\right) c\, e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

מכיון ש E_n היא פונ' זוגית ב z'

$$\int d^3x'\, z'\, e^{-\frac{E_n(z')}{kT}} = 0$$

$$\rightarrow \langle\vec{p}_{mol}\rangle = \hat{z}\frac{eE}{m\omega_0^2}\int d^3P\int d^3x'\, c\, e^{-\frac{E_n}{kT}} = \hat{z}\frac{eE}{m\omega_0^2}\cdot 1$$ (← נרמול)

← $\vec{p}_{mol} = \langle\vec{p}_{mol}\rangle$ לתנודות התרמיות אין השפעה

הקיטוב הקבוע

למולקולות "מקוטבות" (פולריות) יש מומנט דיפול קבוע $\vec{p}_0$

האם $\vec{p}_0$ יהיה מקביל ל $\vec{E}$? (כלומר בכיוון $\langle\vec{p}_{mol}\rangle$ במושרה)

תשובה: רק עבור $T=0$.

ב $T>0$ נקבל שוב תנודות סביב זווית שיווי המשקל

האנרגיה הכוללת - $E_n = E_{n0} - \vec{p}_0\cdot\vec{E} = E_{n0} - AE\underline{\cos\theta}$

סה"כ הרכיבים שונים תלויים בשדה החיצוני

עבור $\vec{E}$ בכיוון $\hat{z}$.

התפלגות בולצמן ←

כתוצאה - $\langle\vec{p}_{mol}\rangle = \int \vec{p}_{mol}(\theta)\, f(\theta)\, d\Omega$

מ $\vec{p}_0$

$$=\langle p_{z\,mol}\rangle = \int d\Omega\, p_0\cos\theta\, C e^{\frac{p_0\cos\theta E}{kT}}$$

משיקולי סימטריה רק הרכיב המקביל בכיוון השדה ($\hat{z}$) לא יתאפס

מהו הסדר הגודל של $\frac{p_0\cos\theta E}{kT}$?

אנרגיה אלקטרוסטטית הדיפול עם השדה החשמלי → $p_0\cos\theta E$

אנרגיה תרמית → kT

$kT \approx 1.38\cdot10^{-23}\cdot300$

מימדי אטום → $p_0 \approx e\cdot A \approx 1.6\cdot10^{-19}\cdot10^{-10}$

$E \lesssim 1000$ וולט/ס"מ $\lesssim 10^5$ וולט/מטר

$$\rightarrow \frac{p_0E}{kT} = \frac{1.6\cdot10^{-24}}{4\cdot10^{-21}} = \underline{4\cdot10^{-4} \ll 1}$$

תשובה:

לכן שבגל להשתמש בקירוב $e^x \approx 1+x$

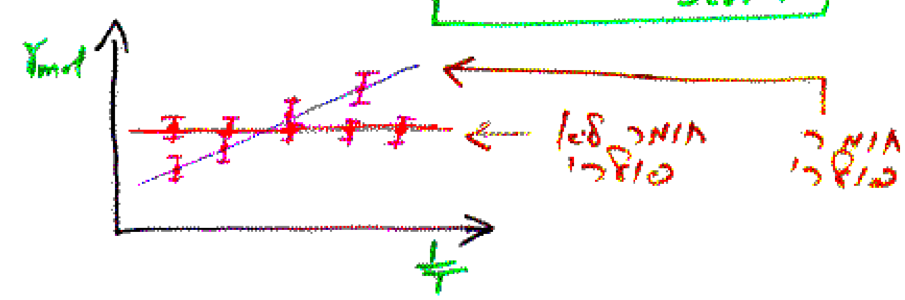
ונקבל

$$\langle\vec{p}_{mol}\rangle \approx \hat{z}\cdot C\cdot 2\pi\, p_0\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{p_0E\cos\theta}{kT}\right)\cdot\cos\theta\, d\cos\theta$$

$$\left(C^{-1} = 2\pi\int_{-1}^{1} e^{\frac{p_0E\cos\theta}{kT}}\, d\cos\theta \approx 4\pi\right) \longrightarrow \quad \langle\vec{p}_{mol}\rangle = \hat{z}\,\frac{1}{3}\frac{p_0^2}{kT}\cdot E \qquad (\ll p_0)$$

סה"כ נקבל:

מהקיטוב המושרה → $\underbrace{\gamma_{mol} \approx \gamma_i + \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 kT}}$ ← מהקיטוב הקבוע



האנרגיה האלקטרוסטטית בתווך דיאלקטרי

עבור מטען בריק $W=\frac{1}{2}\int \rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})\,d^3x$

"בגורם" מובא התפלגות מטען ("אמיתי") בתווך תווך דיאלקטרי
הפירוש W שונה עקב הדיפול המושרה בתווך (למה בדיוק?)

נחשב למקרה הכללי (תווך שהוא לא בהכרח לינארי, איזוטרופי)

עבור ρ, Φ נתונים שינוי קטן ~~של~~ צפיפות המטען $\Delta\rho$ דורש עבודה:
(השינוי ב Φ יתן תיקון מסדר שני)

$$\Delta W=\int \Delta\rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})\,d^3x$$

מכיוון ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$ אזי $\Delta\rho=\vec{\nabla}\cdot\Delta\vec{D}$

נשתמש בזהות הוקטורית $\vec{\nabla}\cdot(\Delta\vec{D}\,\Phi)=\vec{\nabla}\cdot\Delta\vec{D}\,\Phi+\Delta\vec{D}\cdot\vec{\nabla}\Phi$, $-\vec{\nabla}\Phi$

נקבל

$$\Delta W=\underbrace{\oint_S \Delta\vec{D}\cdot\hat{n}\,\Phi\,dA}_{S\to\infty\ \text{עבור}\ \to 0}+\int \Delta\vec{D}\cdot\vec{E}\,d^3x$$

$$\boxed{\Delta W=\int \Delta\vec{D}(\vec{x})\cdot\vec{E}(\vec{x})\,d^3x}$$

ולכן העבודה הכוללת היא

$$W=\int d^3x\int_0^D \vec{E}\cdot\Delta\vec{D}$$

מהו $\vec{E}(\vec{D})$?

בתווך לינארי ואיזוטרופי $\vec{D}=\epsilon\vec{E} \leftarrow \int\vec{E}\cdot\Delta\vec{D}=\frac{1}{2}\int\Delta(\vec{E}\cdot\vec{D})=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

ובמקרה זה נקבל:

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\,d^3x}$$

מכיוון ש $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi$! $\rho=\vec{\nabla}\cdot\vec{D}$ ניתן לחזור מביטוי זה לביטוי למעלה. אבל אם התווך הוא לא לינארי $\vec{D}\neq\epsilon\vec{E}$ חייבים [illegible]

האנרגיה האלקטרוסטטית של גוף דיאלקטרי לא טעון בשדה חשמלי נתון

נניח שקיים תווך ליניארי איזוטרופי עם $\vec{D}_0=\epsilon\vec{E}_0$

ובו האנרגיה האלקטרוסטטית הכוללת $W_0=\frac{1}{2}\int\vec{E}_0\cdot\vec{D}_0\,d^3x$

מכניסים לתווך גוף עם נפח V_1 ובו $\vec{D}_1=\epsilon_1\vec{E}_1$

מהו השינוי באנרגיה האלקטרוסטטית?

$$W=W_1-W_0=\frac{1}{2}\int_{V_1}\left(\vec{E}_1\cdot\vec{D}_1-\vec{E}_0\cdot\vec{D}_0\right)d^3x$$

נראה כיצד להפוך ביטוי זה לביטוי פשוט ו"פיזיקלי" יותר.

$$W=\frac{1}{2}\int\left(\vec{E}_1\cdot\vec{D}_0-\vec{D}_1\cdot\vec{E}_0\right)d^3x+\underbrace{\frac{1}{2}\int\left(\vec{E}_1+\vec{E}_0\right)\left(\vec{D}_1-\vec{D}_0\right)d^3x}_{I}$$

נראה ש $I=0$.

$$I=-\frac{1}{2}\int\underbrace{\vec{\nabla}\Phi}_{-(\vec{E}_1+\vec{E}_0)}\left(\vec{D}_1-\vec{D}_0\right)d^3x$$

ע"י אינטגרציה בחלקים נקבל

$$I=\frac{1}{2}\int\Phi\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_0\right)}_{\rho_1-\rho_0=0}d^3x=0$$

הטענה ש ρ_0 (שיוצר את $\vec{E}_0$) לא השתנה עקב הכנסת הגוף החדש.

את האבר הראשון נשוה ?

$$W=\frac{1}{2}\int\left(\epsilon\,\vec{E}_1\cdot\vec{E}_0-\epsilon_1\vec{E}_1\cdot\vec{E}_0\right)d^3x$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\epsilon_1-\epsilon\right)\vec{E}_1\cdot\vec{E}_0\,d^3x$$

נזכור $\vec{D}_1=\epsilon_1\vec{E}_1=\epsilon_0\vec{E}_1+\vec{P}$, ולכן אם $\epsilon=\epsilon_0$ (התווך המקורי הוא ריק)

אז נקבל

$$W=-\frac{1}{2}\int\vec{P}\cdot\vec{E}_0\,d^3x$$

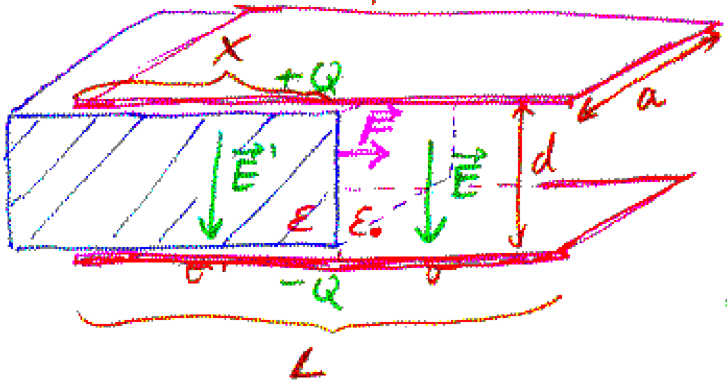
$$\boxed{w=-\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}_0}$$

כלומר צפיפות האנרגיה האלקטרוסטטית היא/ עבור חומר דיאלקטרי המוכנס לשדה נתון $\vec{E}_0$.

דומה לאנרגיה של דיפול בשדה חשמלי, למעט הפקטור $\frac{1}{2}$ (מדוע?)

במצב תמיד $W<0$

דוגמא: הכוח על חומר דיאלקטרי בין לוחות קבל



$\vec F = ?$

נחשב את האנרגיה האלקטרוסטטית הכוללת של המערכת, ונגזור את $\vec F$ ע"י:

$$\vec F = -\frac{dW}{dx}\Big|_{Q,V}$$

או, המטען נשאר קבוע.

הזנחת אפקטי שפה (שדות בקירוב אחידים)
+ שיקולי סימטריה ← השדה ניצב ללוחות בכל מקום

באזור הריק $|\vec E| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

באזור החומר $|\vec E'| = \frac{\sigma'}{\epsilon}$

מרציפות $E_\parallel$ - מעבר לגבול החומר ← $\vec E = \vec E' \to \sigma' = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\sigma$

מה הקיבול? $C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma' x\cdot a + \sigma(L-x)a}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}\cdot d} = \frac{\epsilon x a + \epsilon_0(L-x)a}{d}$

בהנחה שהקבל מנותק ממקורות זרם
← Q נשאר כאשר x משתנה (אבל התפלגותו על המשטח משתנה)

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \longrightarrow F = -\frac{Q^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{C^2}\right)\frac{dC}{dx} \qquad \frac{dC}{dx} = \frac{a}{d}(\epsilon-\epsilon_0)$$

נשתמש בהגדרה $\chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$ ונקבל

$$F = \frac{Q^2}{2C^2}\cdot\frac{a}{d}\epsilon_0\chi_e = \underline{\frac{V^2}{2}\cdot\frac{a\epsilon_0\chi_e}{d}}$$

או ישירות מהחישוב בדוגמא הקודמת

$$W = -\frac{1}{2}(\epsilon-\epsilon_0)|\vec E|^2 \underline{x\cdot a\cdot d}$$ ← האנרגיה שתוסף החומר

$\vec E_1 = \vec E$ מכיון ש

$$\longrightarrow \underline{F = \frac{1}{2}(\epsilon-\epsilon_0)E^2 a d} = \frac{1}{2}(\epsilon-\epsilon_0)V^2\frac{a}{d} = \frac{1}{2}V^2\frac{a}{d}\cdot\epsilon_0\chi_e$$

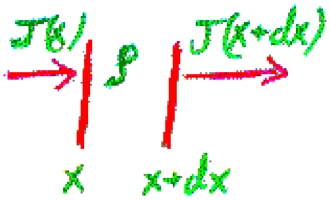
מגנטוסטטיקה

$\vec J(\vec x) \equiv \rho(\vec x)\cdot \vec v(\vec x)$ - צפיפות הזרם (קולון\שנייה\סמ²)

צפיפות המטען הנע

מהירות התנועה

שימור מטען (נכון תמיד)



$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec\nabla\cdot\vec J=0$$

מגנטוסטטיקה

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec J=0}$$

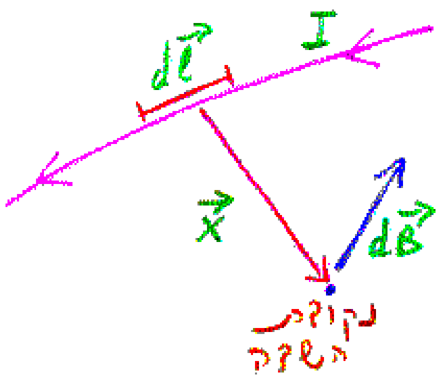
מהם הכוחות הפועלים בין זרמים?

זרם ← שדה מגנטי ← כח על מטענים נעים.

חוק Biot, Savart $(B \Leftarrow I)$

השדה המגנטי הנוצר ע"י תיל נושא

זרם $I\equiv\int_S \vec J\cdot d\vec A$ ← שטח חתך התיל



$$\boxed{d\vec B = kI\frac{d\vec l\times\vec x}{|\vec x|^3}}$$

ההשראה המגנטית
Magnetic induction

מהו k?

Gaussian - cgs

$k=\frac{1}{c}$

$[B]=[E]$ - מטען (esu)\אורך²
כח\מטען

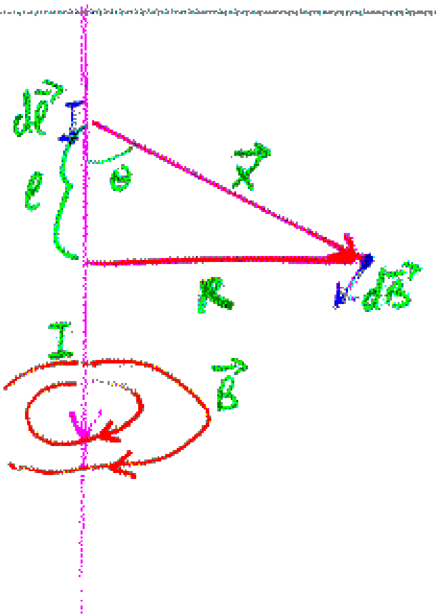
SI - mks

$k=\frac{\mu_0}{4\pi}=10^{-7}$ - ניוטון\אמפר²

B - ניוטון\אמפר × מטר

ניוטון\קולון $[B\cdot v]=[E]$ ← מתאימים

דוגמא: השדה של חוט ישר אינסופי



$$d\vec{l}\times\vec{x} = dl\,(l^2+R^2)^{1/2}\cdot\sin\theta = dl\cdot R$$

$$\rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I\cdot R\cdot\frac{dl}{(l^2+R^2)^{3/2}}$$

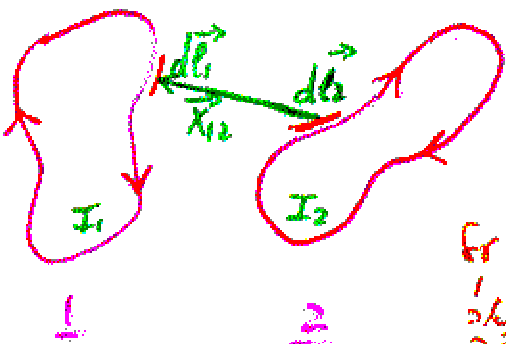
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I\cdot R\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl}{(l^2+R^2)^{3/2}}}_{=\frac{2}{R^2}} = \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}}$$

כמו ההתנהגות של שדה חשמלי אלקטרוסטטי סביב חוט טעון ($\frac{1}{R}$)
(האם חוט נושא זרם הוא חוט טעון?)

חוק אמפר ($F \leftarrow B$)

$\boxed{d\vec{F} = I_1(d\vec{l}_1\times\vec{B})}$ - הכוח על קטע חוט $d\vec{l}_1$ באורך וכיוון עם זרם I_1 הנתון בשדה $\vec{B}$

← הכוח בין שתי לולאות זרם:



$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1\cdot I_2\oint_1\oint_2\frac{d\vec{l}_1\times(d\vec{l}_2\times\vec{x}_{12})}{|\vec{x}_{12}|^3}$$

- הכוח על לולאה 1 כתוצאה מהשדה של לולאה 2.

עבור לצורה פשוטה יותר.
נשתמש בזהות וקטורית

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{l}_1\times(d\vec{l}_2\times\vec{x}_{12})}{|\vec{x}_{12}|^3} = \frac{(d\vec{l}_1\cdot\vec{x}_{12})}{|\vec{x}_{12}|^3}d\vec{l}_2 - \frac{(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2)}{|\vec{x}_{12}|^3}\vec{x}_{12}$$

נראה שהתרומה של האיבר הראשון מימין לאינטגרל = 0

$$\frac{d\vec{l}_1\cdot\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} = d\vec{l}_1\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}_{12}|} \longrightarrow \oint d\vec{l}_1\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}_{12}|} = \oint\left[\frac{d}{dx}(\ )dx + \frac{d}{dy}(\ )dy + \frac{d}{dz}(\ )dz\right] = 0$$

ונקבל את חוק אמפר

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1\cdot I_2\oint\oint\frac{(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2)\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3}} \longrightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

מהו הכוח בין 2 חוטים מוליכים ישרים ואינסופיים ?

משיקולי סימטריה הכוח בניצב לחוטים

$$\frac{dF_{12}}{dl} = I_1 \cdot B_2 \qquad B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d}$$

← השדה שיוצר חוט 2 במיקומו של חוט 1

$$\rightarrow \boxed{\frac{dF_{12}}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}}$$

מכווני המכפלות הוקטוריות ← זרמים מקבילים נמשכים

<u>במקרה הכללי</u>

במקום זרם בחוטים, $\vec J(\vec x)$ - התפלגות זרם במרחב,

הכוח הכולל על התפלגות הזרם הנו

$$\vec F = \int_V d\vec F = \int_V \vec J(\vec x)\times\vec B(\vec x)\, d^3x$$

והשדה הנוצר ע"י התפלגות הזרם

$$\vec B(\vec x) = \int_V d\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec J(\vec x')\times\frac{(\vec x-\vec x')}{|\vec x-\vec x'|^3}\, d^3x'$$

אנלוגי לביטוי באלקטרוסטטיקה

$$\vec E(\vec x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec x')\frac{(\vec x-\vec x')}{|\vec x-\vec x'|^3}\, d^3x'$$

מהו האנלוג במגנטוסטטיקה לחוק גאוס ?

<u>הניסוח הדיפרנציאלי של חוק אמפר</u>

נשתמש בקשר :

$$\underset{\text{פועל על } \vec x}{\nabla}\times\frac{\vec J(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|} = \underset{\text{ב"ת ב } \vec x}{\vec J(\vec x')}\times\nabla\frac{1}{|\vec x-\vec x'|} = \vec J(\vec x')\times\frac{(\vec x-\vec x')}{|\vec x-\vec x'|^3}$$

(באופן כללי $\nabla\times(\psi\vec a) = \nabla\psi\times\vec a + \psi\nabla\times\vec a$)

נרשום את הביטוי ל $\vec B(\vec x)$ כ:

$$\vec B(\vec x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\vec J(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}\, d^3x'$$

ונזכור שבאופן כללי $\nabla\cdot(\nabla\times\vec a)=0$

נקבל

$$\boxed{\nabla\cdot\vec B = 0}$$

על מנת להגדיר את $\vec{B}$ חד ערכית נמצא תנאי דיפרנציאלי נוסף עבור $\vec{\nabla}\times\vec{B}$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

נשתמש בזהות הכללית

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})-\nabla^2\vec{a}$$

ונקבל

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\int\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'}\;\underbrace{-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\underbrace{\nabla^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')}d^3x'}_{=\mu_0\vec{J}(\vec{x})}$$

לא פונקציה של $\vec{x}$ ולכן ∇^2 "מדלג" עליו

נראה שהאיבר הראשון בצד ימין $=0$

$$I=\int\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'=\vec{\nabla}\int\vec{J}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'$$

פועל על $\vec{x}$ בלבד

נשתמש בקשר $\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=-\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$

נקבל

$$I=-\vec{\nabla}\int\vec{J}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'$$

נבצע אינטגרציה בחלקים

$$I=\vec{\nabla}\underbrace{\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'}_{=0}-\vec{\nabla}\underbrace{\int\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'}$$

$$=\vec{\nabla}\oint_S\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{A}=0$$

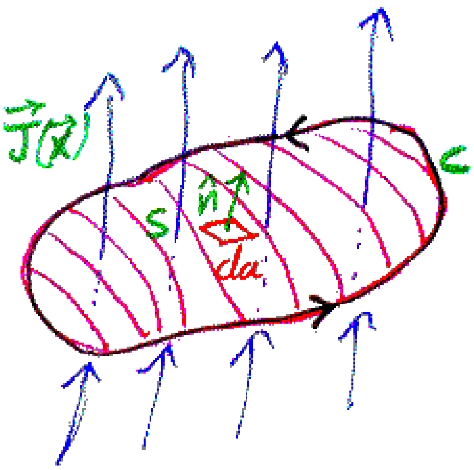
מכיוון שהתפלגות הזרם חסומה עבור ∞, $\vec{J}\to0$.

מכיוון ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$ במגנטוסטטיקה

$$\longrightarrow\quad\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}}$$

המשוואות האנלוגיות באלקטרוסטטיקה: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$

מה האנלוג במגנטוסטטיקה לחוק גאוס האינטגרלי? $\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\epsilon_0}$



נשתמש במשפט סטוקס

$$\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{a})\cdot\hat{n}\,da=\oint_C\vec{a}\cdot d\vec{l}$$

$$\leftarrow \quad \int_S(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\,da=\oint_C\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

אבל, מכיון ש $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$

$$\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\,da=\int_S\mu_0\vec{J}\cdot\hat{n}\,da\equiv I$$

סה"כ הזרם העובר דרך משטח S

חוק אמפר (השני)

אנלוג לחוק גאוס האינטגרלי

$$\boxed{\oint_C\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I}$$

דוגמא:

$\vec{B}(R)$ עבור תיל מוליך ישר אינסופי $\quad \oint B\cdot dl=2\pi R\cdot B=\mu_0 I$

בלי "להזיע" כמו בחישוב $\quad \to B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$

באמצעות הביטוי ל $d\vec{B}$ (70.1)

+ התחשבות נבונה לגבי גליל ברדיוס סופי (בניגוד ל"תיל").

האם יש אנלוג גם לפוטנציאל האלקטרוסטטי?

באזור במרחב בו $\vec{J}=0$ $\leftarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$

$\leftarrow$ ניתן להגדיר פוטנציאל מגנטי: $\vec{B}\equiv-\vec{\nabla}\Phi_m$

המקיים את משוואת לפלס $\to \nabla^2\Phi_m=0$

ומה קורה אם $\vec{\nabla}\times\vec{B}\neq0$?