אלקטרוסטטיקה בחומר

בחומר מוליך $\vec{E}=0$, מה על השדה בחומר לא מוליך?

$Q\bullet$ $\boxed{\vec{E}=?}$

חומר = אלקטרונים + פרוטונים + נייטרונים

$q=-e$ $\quad q=e$ $\quad q=0$

בחומר ניטרלי $\sum q_i=0$ (# אלקט' = # פרוט')

לכל נפח סופי $\Delta V \gg a^3$ $\quad a$ – רדיוס בוהר ~ מימדי אטום ($a=0.5\text{Å}$)

← התרומה של כל ΔV ל-$\vec{E}$ היא אפס? לא בהכרח.

תיתכן תרומה ל-$\vec{E}$ אם $q_{em}\neq 0$.

$\vec{P}=\sum_i \vec{p}_i$ – מומנט הדיפול ליחידת נפח (סופי, לא מיקרוסקופי)

סכום על כל האטומים או מולקולות ליחידת נפח

$\vec{p}_i$ – מומנט הדיפול של כל אטום\מולקולה

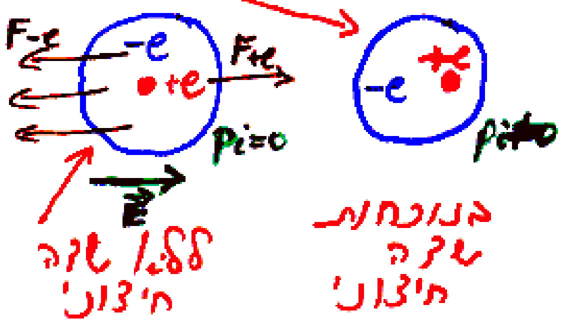
את המולקולות מסודרות באופן אקראי ← $\vec{p}_i$ מתפלגים איזוטרופית

← בקירוב טוב מאוד $\vec{P}=0$

בנוכחות שדה חיצוני

1. $\vec{p}_i$ יעדיפו להסתדר במקביל לשדה (מדוע?)
2. גם אם $\vec{p}_i=0$, בהשפעת השדה החיצוני נקבל $\vec{p}_i\neq 0$, דיפול מושרה.

← $\vec{P}\neq 0$



הפוטנציאל בחומר (לא מוליך) הוא לכן

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\left[\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}+\frac{\vec{P}(\vec{x}')\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right]$$

תרומת המטען הצמוד לפוטנציאל (צמוד = מעבר למטען המולקולות – 0)

תרומת הדיפול (ליחידת נפח סופי)

נשתמש בקשר :

$$\vec\nabla'\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)=\frac{\vec x-\vec x'}{|\vec x-\vec x'|^3}$$

(ניתן להוכיח ע"י שימוש בקואורדינטות קרטזיות, למשל)

$$\rightarrow\ \int\vec P(\vec x')\cdot\frac{(\vec x-\vec x')}{|\vec x-\vec x'|^3}\,d^3x'=\int\vec P(\vec x')\cdot\vec\nabla'\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)d^3x'$$

נשתמש באינטגרציה בחלקים

$$\int\vec P(\vec x')\cdot\vec\nabla'\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)d^3x'=-\int\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\vec\nabla'\cdot\vec P(\vec x')\,d^3x'+\int_S\frac{\vec P(\vec x')\cdot\hat n'\,dA'}{|\vec x-\vec x'|}$$

$\left(\vec\nabla\cdot(f\vec A)=f(\vec\nabla\cdot\vec A)+\vec A\cdot\vec\nabla f\right.$ השתמשנו בזהות)

$\vec\nabla'\cdot\vec P$ ← דומה לפוטנציאל ממטען נפחי

$\vec P\cdot\hat n'$ וממטען משטחי

מהי המשוואה הנכונה אם כן ל $\nabla^2\Phi$ בחומר ?

נבדוק. הביטוי המלא ל Φ הוא

$$\Phi(\vec x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\left[\rho(\vec x')-\vec\nabla'\cdot\vec P(\vec x')\right]+\int_S\frac{\vec P(\vec x')\cdot\hat n'\,dA'}{|\vec x-\vec x'|}$$

נפעיל את ∇^2 (שימו לב - פועל על $\vec x$, ולא על $\vec x'$)

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\,\underbrace{\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)}_{-4\pi\delta(\vec x-\vec x')}[\cdots]+\underbrace{\int_S\underbrace{\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)}_{-4\pi\delta(\vec x-\vec x')}\cdots dA'}_{=0}$$

$\vec x$ - בתוך החומר

$\vec x'$ - על S

$$\rightarrow\ \nabla^2\Phi(\vec x)=\frac{-1}{\varepsilon_0}\left[\rho(\vec x)-\vec\nabla\cdot\vec P(\vec x)\right]$$

ומכיון ש $\vec E=-\vec\nabla\Phi$

נקבל את חוק גאוס בחומר

$$\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho-\vec\nabla\cdot\vec P}{\varepsilon_0}$$

או

$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec D=\rho}\qquad \vec D=\varepsilon_0\vec E+\vec P$$

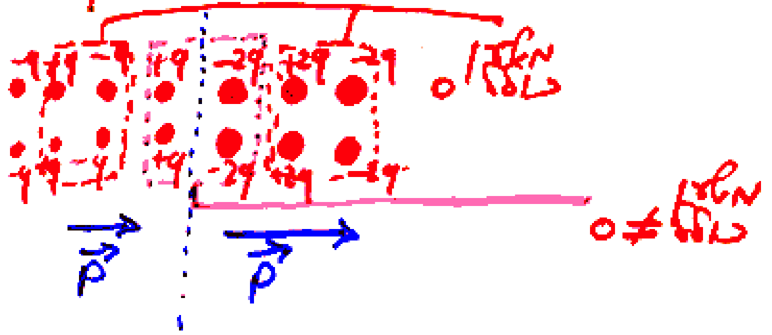
Electric displacement

מכיון ש- Φ - גודל סקלרי (לא וקטורי)

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \leftarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$

כלומר נוכחות הדיפולים בחומר לא משפיעה על הרוטור של $\vec{E}$.

אבל השתנות מרחבית של $\vec{p}$ בחומר משפיעה כמו צפיפות מטען



מהו $\vec{P}$ בחומר?

נניח שתי הנחות לצורך הפשטות

1. תגובה לינארית של הדיפול המושרה לשדה החיצוני.
2. תגובה איזוטרופית " " " " .

$$\rightarrow \vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \vec{E} \rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Electric susceptibility (תגיד במקרה הכללי)

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1+\chi_e)$$

Dielectric constant, relative electric permittivity

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}}$$

אם החומר אחיד $\leftarrow$ ϵ - קבוע במרחב, ואז

כלומר כל הפתרונות שקיבלנו ל $\vec{E}$ בריק

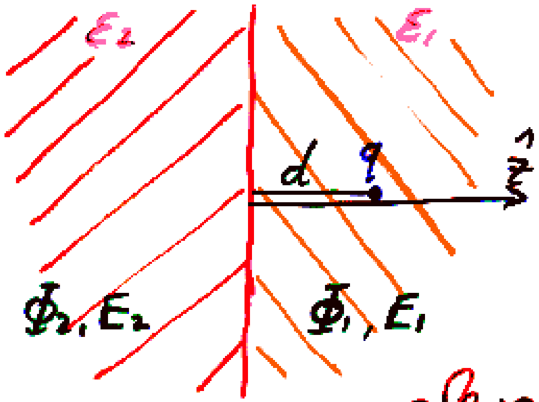
יוכפלו בחומר בפקטור $\frac{\epsilon_0}{\epsilon}$ (<1)

דוגמא:

הקיבול $C = \frac{Q}{V}$ יגדל בפקטור $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$

חומר	ריק	אויר	מלח	זירקון	מים	קרח
ϵ/ϵ_0	1	1.00054	5.9	11.8	80.1	99

בעיות תנאי שפה עם חומרים דיאלקטריים



תנאי השפה

א' רציפות הרכיב הניצב – $(\vec D_2-\vec D_1)\cdot\hat n_{21}=\sigma$

רציפות הרכיב המקביל – $(\vec E_2-\vec E_1)\times\hat n_{21}=0$

וקטור יחידה הניצב לפני המשטח

דוגמא

מטען q בתווך עם $\epsilon=\epsilon_1$ עבור $z>0$! $\epsilon=\epsilon_2$ עבור $z<0$

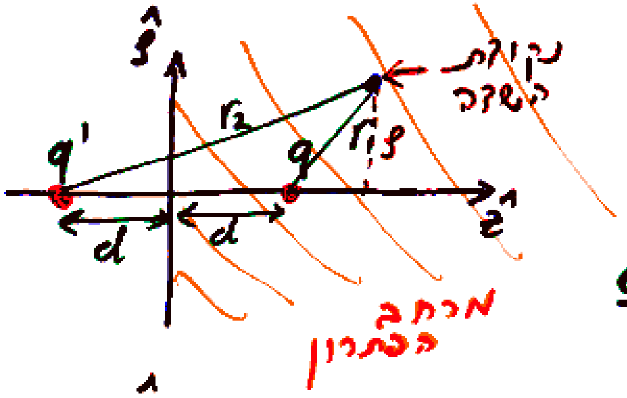
המטען ב $\rho=0, \varphi=0, z=d$ (קואו' צילינדריות)

מה הפוטנציאל בכל המרחב?

$\sigma=0$ ← (אבל E לא רציף ולכן נקבל σ_{pol})

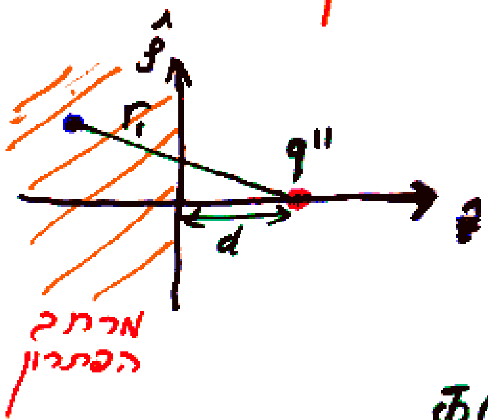
תנאי השפה: $\epsilon_1 E_{1z}=\epsilon_2 E_{2z}$, $E_{1x}=E_{2x}$, $E_{1y}=E_{2y}$

נפתור בשיטת הדמויות



$z>0$

$$\Phi_1(z_{>0},\rho,\varphi)=\frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left(\frac{q}{r_1}+\frac{q'}{r_2}\right)$$



$z<0$

בניגוד למקרה של מטען מול מוליך, כאן קיים פתרון (לא טריויאלי) גם עבור $z<0$
אבל מטען הדמות יכול להיות קיים רק ב $z>0$
על מנת ש $\nabla^2\Phi=0$ ישמר במרחב הפתרון

ננחש פתרון מהצורה

$$\Phi_2(z_{<0},\rho,\varphi)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q''}{r_1}$$

מהם q', q'' שיקיימו את תנאי השפה?

נמצא את הביטוי ל E_z - השדה הניצב למשטח ההפרדה
E_ρ - השדה המקביל למשטח ההפרדה.

$$E_{1z}(\rho,z) = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_1}\left(q\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(d-z)^2}} + q'\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(d+z)^2}}\right)$$

$$E_{2z}(\rho,z) = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_2}\, q''\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(d-z)^2}}\right)$$

מתנאי השפה ל E_z נקבל:

$$\varepsilon_1 E_{1z}(\rho,0) = \varepsilon_2 E_{2z}(\rho,0) \longrightarrow \underline{q-q'=q''}$$

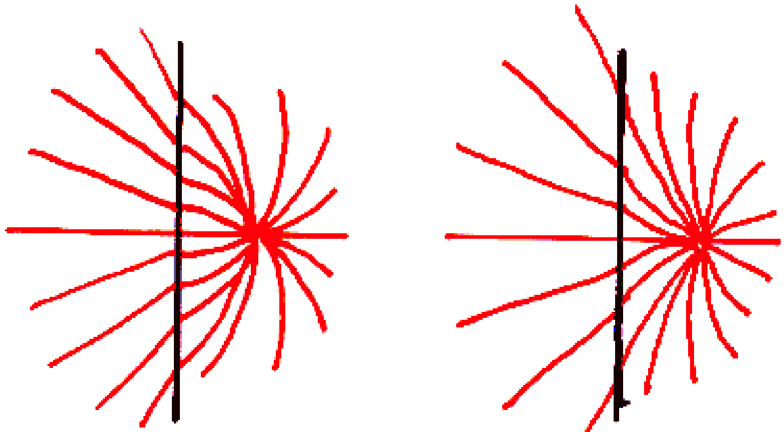
מתנאי השפה ל E_ρ (או E_φ) נקבל

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}(\rho,0) = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\rho}(\rho,0) \longrightarrow \underline{\frac{1}{\varepsilon_1}(q+q') = \frac{1}{\varepsilon_2}q''}$$

והפתרון למטעני הדמות q', q'' כפונקציה של q הוא:

$$q' = -\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q \quad , \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$$

התנהגות קווי ה $\vec D$



$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ $\qquad$ $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$

כיצד מתבטאת "צפיפות המטען הפולריזבילי" הנוצר כתוצאה מהקיטוב - $-\vec\nabla\cdot\vec P$

בתוך כל תווך $\vec P = \varepsilon_0\chi_e\vec E$

$\to \vec\nabla\cdot\vec P = \varepsilon_0\chi_e\vec\nabla\cdot\vec E = 0$

(למעט הנקודה בה נמצא המטען האמיתי q)

אבל יש לנו צפיפות σ ב $z=0$ $\leftarrow$ $\sigma_{pol} = -(\vec P_2-\vec P_1)\cdot\hat n_{21}$

צפיפות המטען המשטחית הנובעת מהקיטוב המשתנה

וקטור יחידה מחומר 1 ל 2.

נשתמש בקשר $\vec P_{1,2} = (\varepsilon_{1,2}-\varepsilon_0)\vec E$

ונקבל ב $z=0$

$$\sigma_{pol} = \frac{-q}{2\pi}\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}\frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

בגבול $\varepsilon_2 >> \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \to \varepsilon_0$

נקבל את הפתרון עבור מטען q מול מוליך

האם $\vec{D}$ "מחליף" את $\vec{E}$ בתוך חומר?

הרי בתוך חומר $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$ במקום $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

אבל מה לגבי הרוטור?

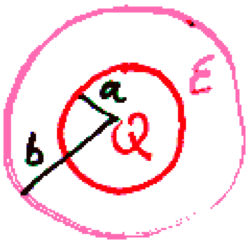
$$\vec{\nabla}\times\vec{D}=\vec{\nabla}\times(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})$$
$$=\varepsilon_0\vec{\nabla}\times\vec{E}+\vec{\nabla}\times\vec{P}=\vec{\nabla}\times\vec{P}\neq 0$$

בד"כ:

← $\vec{D}$ לא ניתן לכתיבה כ $\vec{\nabla}\Phi$

הכוח האלקטרוסטטי נשאר $q\vec{E}$ והפוטנציאל $\int\vec{E}\cdot d\vec{l}$

דוגמא



כדור מוליך ברדיוס a טעון במטען Q מוקף בחומר דיאלקטרי עם ε ברדיוס b. מה הפוטנציאל במרכז הכדור?

מחוק גאוס האינטגרלי: $\int_S \vec{D}\,dA=Q$

ומתוך סימטריה ספרית נקבל $\vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$ $\quad a<r<b$

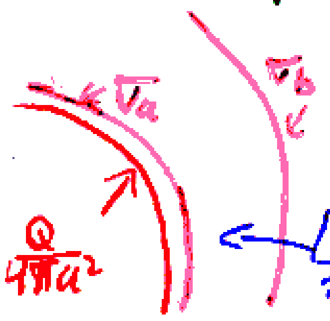
וסה"כ

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<a\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} & a<r<b\\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & b<r\end{cases}$$

$$\to \Phi(0)=-\int_\infty^0\vec{E}\cdot d\vec{r}=-\int_\infty^b\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr-\int_b^a\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr=\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0 b}+\frac{1}{\varepsilon a}-\frac{1}{\varepsilon b}\right)$$

מהי צפיפות המטען המושרה על פני הקליפה הדיאלקטרית? (כלומר בשונה מ $\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$)

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}=\frac{\varepsilon_0\chi_e}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$



בתוך החומר הדיאלקטרי $\vec{\nabla}\cdot\vec{P}=0$

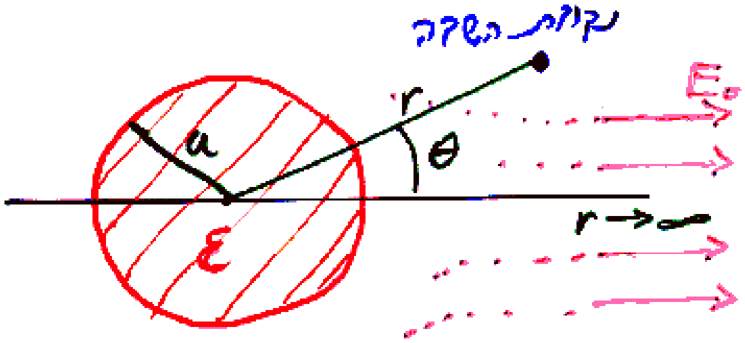
על פני המעטפת b $\quad \sigma_b=\vec{P}(b)\cdot\hat{n}=\frac{\varepsilon_0\chi_e}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi b^2}$

" " " a $\quad \sigma_a=-\vec{P}(a)\cdot\hat{n}=-\frac{\varepsilon_0\chi_e}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi a^2}$

מקטין את השדה

הניגוד למטען בכיוון $-\hat{r}$

כדור דיאלקטרי בשדה אחיד אסימפטוטית $(r\to\infty)$



כיצד משפיע על השדה כדור דיאלקטרי המוכנס לשדה אחיד?

אין מטענים חופשיים

← פתרון משוואת לפלס

הפתרון הכללי הוא

$r<a \qquad \Phi_{in}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$

$r>a \qquad \Phi_{out}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta)$

נמצא את A_l, B_l, C_l באמצעות תנאי השפה:

ב $r\to\infty$

$$E=E_0\hat{z} \to \Phi_{out}\to -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$$

כלומר $B_{l\neq1}=0 \; ; \; B_1=-E_0$

ב $r=a$

רציפות E_θ:

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{in}(a,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{out}(a,\theta)}{\partial\theta}$$

השיוויון מתקיים לכל רכיב בנפרד (כי $\frac{\partial P_l}{\partial\theta}=P_l^{1}$ גם הן פונ' מאונכות)

$l=1 \qquad aA_1=-aE_0+C_1a^{-2}$

$l\neq1 \qquad a^lA_l=a^{-(l+1)}C_l$

רציפות D_r:

$$-\varepsilon\frac{\partial\Phi_{in}}{\partial r} = -\varepsilon_0\frac{\partial\Phi_{out}}{\partial r}$$

$l=1 \qquad \varepsilon A_1 = -\varepsilon E_0 - 2C_1a^{-3}$

$l\neq1 \qquad \varepsilon l a^{l-1}A_l = -(l+1)a^{-(l+2)}\varepsilon_0 C_l$

אין פתרון לשני תנאי הרציפות במקרה $l\neq1$ לכל $l, \varepsilon_0, \varepsilon$

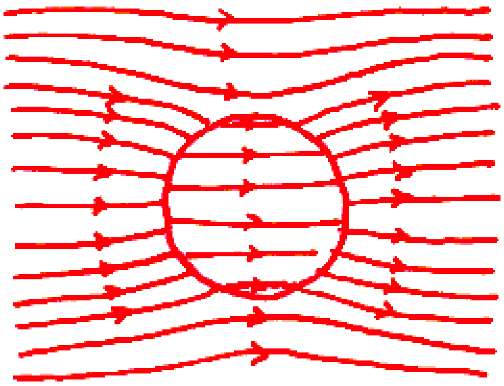
למעט הפתרון הטריויאלי $A_l=C_l=0$

ומשתי המשוואות ל A_1, C_1 עבור $l=1$ נקבל

$$A_1 = \frac{-3}{2+\epsilon/\epsilon_0}E_0 \quad , \quad C_1 = \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2}\right)a^3 E_0$$

$$\to \quad \Phi_{in} = \frac{-3}{2+\epsilon/\epsilon_0}E_0 r\cos\theta \quad , \quad \Phi_{out} = -E_0 r\cos\theta + \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2}\right)E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$$

קווי השדה $\vec{E}$



← השדה בתוך הכדור גם כן בכיוון z!

$$\Phi_{in} = \frac{-3}{2+\epsilon/\epsilon_0}E_0 z \to E_{in} = \underbrace{\frac{3}{2+\epsilon/\epsilon_0}}E_0\hat{z}$$

אבל $E_{in} < E_0$ $(\epsilon > \epsilon_0)$
בגלל הסיכוך של הדיפול המושרה.

בכדור, עבור $\vec{p} = p\hat{z}$ $\quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$

← תרומת הכדור ל Φ_{out} זהה לדיפול $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}-1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}+2}\right)E_0 a^3\hat{z}$

ממוצע הקיטוב ליחידת
נפח בכדור נתון מהקשר $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = (\epsilon-\epsilon_0)\vec{E} = \frac{3(\epsilon-\epsilon_0)}{2+\epsilon/\epsilon_0}\vec{E}_0$

← $\vec{p} = \frac{4\pi}{3}a^3\vec{P}$, כפי שצריך להיות.

המטען המשטחי המושרה מ $\vec{P}$

$$\sigma_{pol} = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\hat{n}_{12} = \vec{P}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = 3\epsilon_0\left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}-1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}+2}\right)E_0\cos\theta$$

מייצר שדה של דיפול בתוך הכדור בכיוון $-\hat{z}$, ממסך חלק מהשדה החיצוני.

מה הפתרון עבור:
(חור בתוך חומר דיאלקטרי)?