פיתוח הפוטנציאל האלקטרוסטטי למולטיפולים

הפוטנציאל של מטען נקודתי יורד לפי r^{-1}.
איך יורד הפוטנציאל של התפלגות מטען?

מניח שאם נתונה התפלגות מטען $\rho(\vec{x}')$ עד למרחק R מראשית הצירים, אז ניתן לרשום:

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

= פיתוח הפוטנציאל למולטיפולים

$l=0$ - איבר המונופול $\propto r^{-1}$, $l=1$ איבר הדיפול $\propto r^{-2}$, $l=2$ איבר הקוודרפול $\propto r^{-3}$
$l=3$ אוקטופול $\propto r^{-4}$, $l=4$ הקסדקופול $\propto r^{-5}$.

← במרחק גדול מאוד $\Phi\propto\frac{1}{r}$, כשמתקרבים נוספים (כלומר נעשים משמעותיים) איברים מהצורה $\frac{Y_{1m}}{r^2}$, קרוב יותר נוספים איברים $\frac{Y_{2m}}{r^2}$ וכו'.

הוכחה

כידוע
$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

נרשום את $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ כסכום של Y_{lm}.

בפיתוח עבור טבעת טעונה קיבלנו (ע' 37)

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^{-(l+1)}P_l(\cos\alpha)$$

$\vec{x}'$ - נקודת האינטגרציה בתוך הנפח V.
$\vec{x}$ - נקודת השפה מחוץ ל-V ← $r=|\vec{x}|>|\vec{x}'|=r'$ $\quad A_l=r'^l$

עפ"י משפט החיבור (ע' 40)

$$P_l(\cos\alpha)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

קואורדינטות נקודת המטען בתוך V ; קואורדינטות נקודת השפה

מצירוף שני הביטויים נקבל:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r'^l}{r^{l+1}}Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

נציב ביטוי זה באינטגרל ל $\Phi(\vec{x})$ ונקבל:

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{\epsilon_0}\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\left[\int Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\cdot r'^l\rho(r',\theta',\varphi')d^3x'\right]\cdot\frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

כלומר קיבלנו פיתוח של הפוטנציאל למולטיפולים, כאשר

מומנט המולטיפול מסדר l – $q_{lm}=\int Y^*_{lm}(\theta',\varphi')r'^l\rho(r',\theta',\varphi')d^3x'$

מומנט המונופול

$$q_{00}=\int_V Y^*_{00}\,\rho(\vec{x}')r'^0d^3x'=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_V\rho(\vec{x}')d^3x'=\frac{q}{\sqrt{4\pi}}$$ ← המטען הכולל

במרחק גדול מספיק ניתן לרשום את הפוטנציאל בקירוב:

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi}{2\cdot 0+1}\cdot\frac{q}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{r^{0+1}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

= פוטנציאל של מטען נקודתי q ב $r=0$.

מומנט הדיפול

$$q_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int r'\sin\theta\, e^{-i\varphi}\underbrace{}_{\rho(\vec{x}')}d^3x'=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int(r'\sin\theta\cos\varphi-ir'\sin\theta\sin\varphi)\rho(\vec{x}')d^3x'$$

$$=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int(x'-iy')\rho(\vec{x}')d^3x'=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x-ip_y)$$

$$q_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int r'\cos\theta\,\rho(\vec{x}')d^3x'=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int z'\rho(\vec{x}')d^3x'=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z$$

$$q_{1-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x+ip_y)$$

רכיבי מומנט הדיפול בקואורדינטות קרטזיות

(באופן כללי: $q_{l,-m}=(-1)^m q^*_{lm}$)

← ניתן לרשום את מומנט הדיפול כוקטור בקוא' קרטזיות

$$\vec{p}=\int \vec{x}\,'\cdot \rho(\vec{x}\,')\,d^3x'$$

3 המומנטים p_x, p_y, p_z ברישום מקוצר הן!

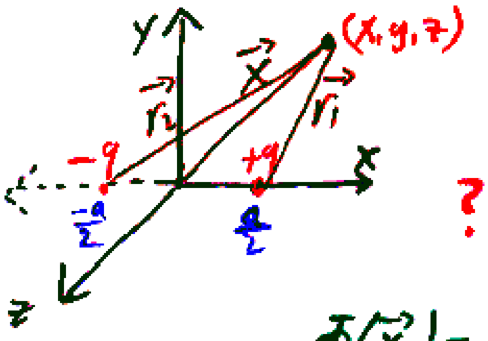
והתרומה של מומנט הדיפול לפוטנציאל היא:

$$\Delta\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{r^2}\Big[\underbrace{-\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}(p_x-ip_y)\cdot-\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}}_{q_{11}\cdot Y_{11}}+\underbrace{\sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cdot p_z\cdot\sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta}_{q_{10}\,Y_{10}}$$

$$+\underbrace{\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}(p_x+ip_y)\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}}_{q_{1-1}\cdot Y_{1-1}}\Big]=\frac{1}{3\varepsilon_0 r^2}\Big\{\frac{3}{8\pi}\sin\theta\big[p_x\underbrace{(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})}_{2\cos\varphi}+ip_y\underbrace{(-e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})}_{-2i\sin\varphi}\big]$$

$$+\frac{3}{4\pi}p_z\cos\theta\Big\}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\big[p_x\sin\theta\cos\varphi+p_y\sin\theta\sin\varphi+p_z\cos\theta\big]$$

$$\longrightarrow\ \boxed{\Delta\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\vec{p}\cdot\vec{r}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$



דוגמא פשוטה

מהו $\Phi(\vec{x})$ הנוצר ע"י 2 מטענים: $+q$ ב- $(\frac{a}{2},0,0)$ ו- $-q$ ב- $(-\frac{a}{2},0,0)$?

נחשב ישירות: (בלי שימוש בפיתוח במולטיפולים)

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{|\vec{r}_1|}-\frac{q}{|\vec{r}_2|}\right)$$

$$r_1=|\vec{r}_1|=\sqrt{\left(x-\tfrac{a}{2}\right)^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2-ax+\tfrac{a^2}{4}}=r\sqrt{1-\tfrac{ax}{r^2}+\tfrac{a^2}{4r^2}}$$

נניח $r>>a$, כלומר נמצאים רחוק מהאזור בו נמצאים המטענים

$$\rightarrow\ r_1\approx r\sqrt{1-\tfrac{ax}{r^2}}\approx r\left(1-\tfrac{ax}{2r^2}\right)\longrightarrow\frac{1}{r_1}\approx\frac{1}{r}\cdot\left(1+\frac{ax}{2r^2}\right)$$

$$\longrightarrow\ \Phi(\vec{x})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\left(1+\frac{ax}{2r^2}\right)-\frac{1}{r}\left(1-\frac{ax}{2r^2}\right)\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot ax}{r^3}$$

$\vec{p}=qa\cdot\hat{x}$ בדוגמא זו $q_{00}=0$ ומומנט הדיפול $\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

מומנט הקוודרופול

$$q_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int \sin^2\theta' e^{-2i\varphi'} \rho(\vec{x}')\, d^3x' = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int (x'-iy')^2 \rho(\vec{x}')\, d^3x'$$

בקואורדינטות קרטזיות מומנט הקוודרופול מיוצג ע"י טנזור המוגדר ע"י

$$\underline{Q_{ij} \equiv \int \rho(\vec{x}')(3x_i' x_j' - r'^2\delta_{ij})\, d^3x'}$$

את הביטוי ל q_{22} ניתן להמיר לביטוי קרטזי באופן הבא:

$$(x'-iy')^2 = \frac{1}{3}\left[(3x'^2 - r'^2) - 6ix'y' - (3y'^2 - r'^2)\right]$$

$$\rightarrow \quad q_{22} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\left(Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}\right)$$

ובאופן דומה מקבלים:

$$q_{21} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\left(Q_{13} - iQ_{23}\right)$$

$$q_{20} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\, Q_{33}$$

ומהצבה של מבנית הקוודרופול לביטוי ל $\Phi(r,\theta,\varphi)$ (44.ד) נקבל

$$\underline{\Delta\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5}}$$

ולכן הפוטנציאל הכולל נתון ע"י

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5} + \dots\right]$$

ניתן לקבל ביטוי זה ישירות (כלומר בלי פיתוח במולטיפולים עם $Y_{\ell m}$) ע"י פיתוח $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ בטור טיילור סביב $\vec{x}'=0$ (במקום הפיתוח ב $Y_{\ell m}$ בו השתמשנו). פיתוח זה מוביל להגדרת Q_{ij} המופיעה למעלה. הפיתוח מבוצע ב Greiner p.88

רכיבי השדה החשמלי

$$\vec E = -\vec\nabla\Phi$$

ובקואורדינטות ספריות

$$\vec E = \overbrace{-\frac{\partial\Phi}{\partial r}}^{E_r}\hat r,\ \overbrace{-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}}^{E_\theta}\hat\theta,\ \overbrace{\frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}}^{E_\varphi}\hat\varphi$$

עבור הרכיב l,m בפוטנציאל

$$\Delta\Phi_{l,m} = \frac{1}{\epsilon_0(2l+1)}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

נקבל את התרומה הבאה לרכיבי השדה

$$\Delta E_r = \frac{(l+1)}{\epsilon_0(2l+1)}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+2}},\quad \Delta E_\theta = \frac{-1}{\epsilon_0(2l+1)}\frac{q_{lm}}{r^{l+2}}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\Delta E_\varphi = \frac{-1}{\epsilon_0(2l+1)}\frac{q_{lm}}{r^{l+2}}\frac{im}{\sin\theta}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

עבור מומנט הדיפול נקבל:

בהנחה $\vec p = p\hat z$

$\leftarrow q_{11}=q_{1-1}=0,\ q_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}p$

$$E_r = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\sin\theta}{r^3},\quad E_\varphi = 0$$

לחילופין ניתן לקבל את רכיבי השדה ישירות מהפעלת $\vec\nabla$ על הביטוי ל-Φ של דיפול

כיוון כלשהו (לאו דווקא $\hat z$)

$$\vec E = -\vec\nabla\Phi = -\vec\nabla\left(\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^3}\vec\nabla(\vec p\cdot\vec r) - (\vec p\cdot\vec r)\vec\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

מכיון ש-$\vec\nabla$ אופר׳ $\left(\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}\right)$ סקלר·סקלר מותר להשתמש בכלל השרשרת

$$\vec\nabla(\vec p\cdot\vec r) = \hat x\frac{\partial}{\partial x}(xp_x+yp_y+zp_z),\ \hat y\frac{\partial}{\partial y}(xp_x+yp_y+zp_z),\ \hat z\frac{\partial}{\partial z}(xp_x+yp_y+zp_z)$$

$$= \hat x p_x,\ \hat y p_y,\ \hat z p_z = \vec p$$

$$\vec\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \hat x\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \hat y\ldots = \hat x\frac{-3/2\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\ \hat y\ldots = \frac{-3x\hat x}{r^5},\ \hat y\ldots = \frac{-3\vec r}{r^5}$$

$$\longrightarrow -\nabla\Phi = -\frac{\vec p}{r^3} + \frac{(\vec p\cdot\vec r)\cdot 3\vec r}{r^5} = \boxed{\frac{3\hat n(\hat n\cdot\vec p)-\vec p}{r^3}}\qquad \left(\hat n = \frac{\vec r}{r}\right)$$

באלו המומנטים של התפלגות מטען תלויים במערכת הקואורדינטות?

נבדוק:

מומנט המונופול - $q_{00}=\frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$ ב"ת בקואורדינטות

מומנט הדיפול - $\vec{p}=\int \vec{x}'\rho(\vec{x}')d^3x'$

האם $\vec{p}$ ישתנה לאחר הטרנספורמציה $\vec{x}' \to \vec{x}'+\vec{a}$?

וקטור ההזזה של מערכת הצירים

מומנט הדיפול במערכת המוזזת - $\vec{p}_a=\int(\vec{x}'+\vec{a})\rho(\vec{x}')d^3x'=\int \vec{x}'\rho(\vec{x}')d^3x'+\vec{a}\cdot\int\rho(\vec{x}')d^3x'$

$$\to \vec{p}_a=\vec{p}+Q\vec{a}$$

תשובה: אם $Q=0$ אזי $\vec{p}$ ב"ת במערכת הקואורדינטות

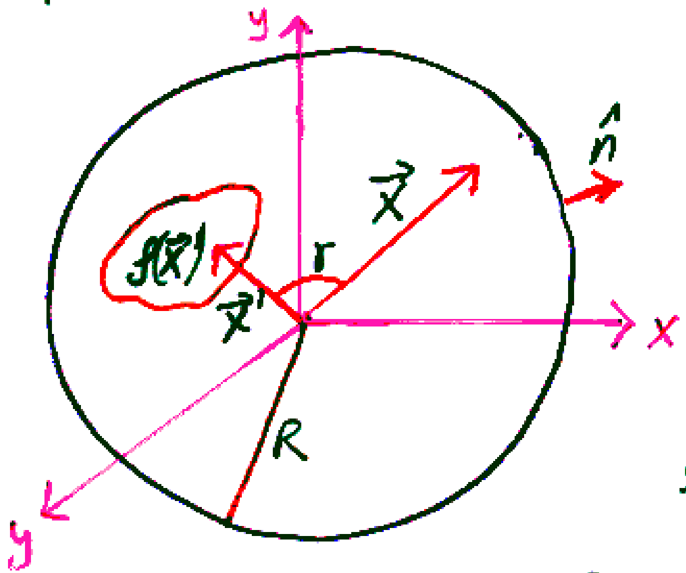
" $Q\neq 0$ " $\vec{p}$ תלוי " "

באופן דומה ניתן להראות שאם $\vec{p}=0$ אזי מומנט הקוודרופול ב"ת במערכת הקואורדינטות.

באופן כללי - המומנט q_{lm} הנמוך ביותר שאינו מתאפס יהיה לא תלוי במערכת הקואורדינטות.

איבר תיקון לשדה של דיפול

נחשב ב ביטויים שימושיים לאינטגרל הנפחי של $\vec{E}(\vec{x})$
ונסיק את קיומו של איבר תיקון ל $\vec{E}(\vec{x})$ הנוצר ע"י דיפול $\vec{p}$.



נתון $\rho(\vec{x}')$

כאשר $|\vec{x}'|=r'<R$

מהו $I=\int_{r\le R}\vec{E}(\vec{x})\,d^3x=?$

נעבור לאינטגרל משטחי של Φ

$$I=\int_{r\le R}\vec{E}(\vec{x})\,d^3x=-\int_{r\le R}\vec{\nabla}\Phi\,d^3x=-R^2\int_{r=R}\Phi(\vec{x})\,\hat{n}\,d\Omega$$

$\hat{n}=\frac{\vec{x}}{R}$ – וקטור יחידה הניצב לפני השטח (הכיוון הוקטורי של יחידת השטח)

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x' \to I=\frac{-R^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\left[\rho(\vec{x}')\underbrace{\int_{r=R}\frac{\hat{n}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d\Omega}\right]$$

נחשב את

הרכיבים הקרטזיים של $\hat{n}$ הנמצא בקואורדינטה (θ,φ) על פני הכדור הם:

$$\hat{n}=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x},\ \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y},\ \cos\varphi\,\hat{z}$$

כפי שקיבלנו בעבר (ע. 37)

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}r'^{l}R^{-(l+1)}P_l(\cos\gamma)\qquad(|\vec{x}'|<|\vec{x}|)$$

ואת $\hat{n}$ ניתן לרשום כקומבינציות לינאריות של Y_{1m} ← תוצאת $\int\hat{n}\cdot\Sigma\,d\Omega$ תשאיר מהסכום רק את האיבר $l=1$ (אורתוגונליות ה P_l).

$$\to\int_{r=R}\frac{\hat{n}\,d\Omega}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\frac{r'}{R^2}\int\hat{n}\cos\gamma\,d\Omega$$

כאשר: $\cos\gamma=\cos\theta\cdot\cos\theta'+\sin\theta\cdot\sin\theta'\cdot\cos(\varphi-\varphi')$

מבין תוצאות האינטגרל הזויתי ?

נבדוק עבור רכיב $\hat{x}$

$$\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\sin\theta\cos\varphi\cdot\left[\cos\theta\cdot\cos\theta'+\sin\theta\cdot\sin\theta'(\cos\varphi\cdot\cos\varphi'+\sin\varphi\cdot\sin\varphi')\right]$$

$$\to\cos\theta'\int_0^{\pi}d\theta\left[\sin^2\theta\cos\theta\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}_{=0}\right]=\cos\theta'\int d\theta\,\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot 0=0$$

נציב $x=\cos\theta$ ונקבל

$$\sin\theta'\cos\varphi'\int_0^{\pi}d\theta\left[\sin^3\theta\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi}_{=\pi}\right]=\sin\theta'\cos\varphi'\cdot\pi\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4\pi}{3}\sin\theta'\cos\varphi'$$

והאבר האחרון נותן

$$\sin\theta'\sin\varphi'\int_0^{\pi}d\theta\left[\sin^3\theta\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi}_{=0}\right]=0$$

כלומר סה"כ: $\frac{4\pi}{3}\sin\theta'\cos\varphi'\hat{x}$

כנ"ל לרכיבים $\hat{y}$ ו $\hat{z}$, והתוצאה הסופית פשוטה באופן מפתיע

$$\int\hat{n}\cos\gamma\,d\Omega=\frac{4\pi}{3}\hat{n}',\quad \hat{n}'=\frac{\vec{x}'}{r'}$$

נחזור לאינטגרל המקורי

$$I=-\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\left[\rho(\vec{x}')\cdot\frac{r'}{R^2}\cdot\frac{4\pi}{3}\hat{n}'\right]$$

$$=-\frac{1}{3\epsilon_0}\int\rho(\vec{x}')\cdot\vec{x}'\,d^3x'\to\boxed{\int_{r<R}\vec{E}(\vec{x})d^3x=-\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}}$$ - ביטוי שימושי

הנ"ל נכון כאשר $r'<R$ - כלומר התפלגות המטען בתוך נפח האינטגרציה.

כאשר $r'>R$ (אין מטען בנפח האינטגרציה)

השינוי היחיד הוא בפיתוח $|\vec{x}-\vec{x}'|^{-1}$:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{R^\ell}{r'^{\ell+1}}P_\ell(\cos\gamma)$$

$$\to\int_{r=R}\frac{\hat{n}\,d\Omega}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\frac{R}{r'^2}\int\hat{n}\cos\gamma\,d\Omega$$

והאינטגרל על הנפח יתן

$$\int_{r<R} \vec E(\vec x)\, d^3x = \frac{-R^2}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\, \rho(\vec x')\frac{R}{r'^2}\cdot\frac{4\pi}{3}\hat n'$$

$$= -\frac{R^3}{3\epsilon_0}\int d^3x' \frac{\hat n'\rho(\vec x')}{r'^2}$$

נשים לב שבאופן כללי

$$\vec E(\vec x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec x')\frac{(\vec x-\vec x')}{|\vec x-\vec x'|^3}\,d^3x'$$

← האינטגרל למעלה הנו בעצם $4\pi\epsilon_0 \cdot \vec E(\vec x=0)$

לכן $\int \vec E(\vec x)\, d^3x = \frac{4\pi}{3}R^3\vec E(0)$ - ביטוי שימושי ב'

השדה <u>הממוצע</u> בתוך כדור ללא מטען = שדה <u>במרכז</u> הכדור.

נבדוק את ביטוי שימושי א' עבור השדה שחישבנו לדיפול

$$\vec E(\vec x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\hat n(\vec p\cdot\hat n)-\vec p}{|\vec x-\vec x'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\vec\nabla\left(\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}\right)\right)$$

$$\to \int \vec E(\vec x)\, d^3V = \frac{-R^2}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat n(\vec p\cdot\hat n)}{R^2}\,d\Omega = 0$$

אבל התוצאה אמורה לצאת $-\frac{\vec p}{3\epsilon_0}$

אם נבצע את האינטגרל על <u>הנפח</u> נקבל ← $\propto \int_0^R \frac{r^2dr}{r^3}$ - מתבדר

הביטוי שקיבלנו ל $\vec E$ כולל [illegible] ב $r=0$ שם Φ מתבדר

הביטוי המתוקן ל $\vec E$ של דיפול הנו

$$\vec E(\vec x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\hat n(\vec p\cdot\hat n)-\vec p}{|\vec x-\vec x_0|^3} - \underbrace{\frac{4\pi}{3}\vec p\,\delta(\vec x-\vec x_0)}\right]$$

אבל התיקון המקיים את "ביטוי שימושי א'"

האנרגיה של התפלגות מטען בשדה חשמלי

מהי האנרגיה הפוטנציאלית של רכיבי המולטיפולים השונים בשדה חשמלי נתון?

$$W = \int \rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})\,d^3x$$ — באופן כללי

בהנחה ש Φ משתנה לאט על פני האזור בו $\rho \neq 0$, אזי בקירוב טוב

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(0) + \vec{x}\cdot\vec{\nabla}\Phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2\Phi(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots$$

$$= \Phi(0) - \vec{x}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \cdots$$

מכיון ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ עבור שדה הנגרם ע"י מטען חיצוני

$$= \Phi(0) - \vec{x}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j}\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)\frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i}$$

נציב את הפיתוח של Φ בביטוי ל W ונקבל

המטען הכולל

$$W = q\cdot\Phi(0) - \vec{p}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \cdots$$

← האנרגיה הפוטנציאלית של מטען פרופורציונית לפוטנציאל

" " " דיפול " לשדה

" " " קוודרופול " לגרדיאנט השדה

אינטראקציה בין שני דיפולים

$$W_{12} = -\vec{p}_1\cdot\vec{E}_{p_2} = \frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 - 3(\hat{n}\cdot\vec{p}_1)(\hat{n}\cdot\vec{p}_2)}{r^3}$$

סימון $W = \frac{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|}{r^3}$ ←

$W_{12}=$		
W	$\uparrow$	$\uparrow$
$-W$	$\uparrow$	$\downarrow$
$-2W$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
$2W$	$\leftarrow$	$\rightarrow$

← משיכה או דחיה בהתאם לכיוון היחסי של הדיפולים.

מולטיפולים השונים ע"י מטענים נקודתיים