המשוואה ל U

$$\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2}=const\equiv l(l+1)$$

נציב $U=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n$

ונקבל $\underline{U=Ar^{l+1}+Br^{-l}}$

המשוואה ל P

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=-l(l+1)$$

נציב $x=\cos\theta$ $(-1\le x\le 1)$

$\Leftarrow$ $dx=-\sin\theta\, d\theta$

ונקבל:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\cdot P=0$$

נקראת "generalized Legendre equation"

עבור $m=0$ נקבל את "ordinary Legendre equation"

ננסה לפתור את המשוואה ע"י טורים $P(x)=x^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}a_j x^j$

מהצבה במשוואה הרגילה Legendre נקבל

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left\{(\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j x^{\alpha+j-2}-[(\alpha+j)(\alpha+j+1)-l(l+1)]a_j x^{\alpha+j}\right\}=0$$

עבור $j=0,\ a_0\neq 0$ נקבל ש α צריך לקיים $\alpha(\alpha-1)=0$

עבור $j=1,\ a_1\neq 0$ " " " $\alpha(\alpha+1)=0$

$\alpha=0,1$

עבור $j\geq 2$ שני האיברים תורמים לסכום, ומהשוואת המקדמים של x בחזקה נתונה נקבל

$$a_{j+2}=\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1)-l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)}\cdot a_j$$

עבור $j\to\infty$ נקבל $\frac{a_{j+2}}{a_j}\longrightarrow const$

$\Leftarrow$ הטור מתבדר עבור $x=\pm 1$ (לא פיזיקלי)

על מנת למנוע התבדרות הסדרה צריכה להיות סופית

← צריך j מסוים $(\alpha+j)(\alpha+j+1)=\ell(\ell+1)$

ומכאן ש: $\alpha=0,1$ ← $j(j+1)=\ell(\ell+1)$ או $(j+1)(j+2)=\ell(\ell+1)$

← ℓ - מספר חיובי שלם, או אפס

אם $a_0=0$ יחס הנסיגה (Recursion) נותן $a_{\text{זוגי}}=0$

← $a_1\neq 0$ ← ($\alpha=0$ והסכום יכיל חזקות אי זוגיות

אם $a_1=0$ ← סדרה אי זוגית

נקבל את פולינומי לג'נדר:

$P_\ell(x)$ - פולינום מסדר ℓ

הנרמול המקובל $P_\ell(1)=1$

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

פולינומי לג'נדר הן פונקציות אורתוגונליות

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell'}(x)\cdot P_\ell(x)\,dx=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell',\ell}$$

ומהווים בסיס שלם בתחום $-1\le x\le 1$

פונקציה רציפה ואינטגרבילית - $f(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}A_\ell P_\ell(x)$

כאשר מקדמי הפיתוח נתונים ע"י:

$$A_\ell=\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_\ell(x)\,dx$$

ברישום קומפקטי

$$P_\ell(x)=\frac{1}{2^\ell\,\ell!}\frac{d^\ell(x^2-1)^\ell}{dx^\ell}$$ - נוסחת רודריגז.

מתקיימים יחסי נסיגה שונים למשל

$$\frac{dP_{\ell+1}}{dx}-\frac{dP_{\ell-1}}{dx}=(2\ell+1)P_\ell$$

$$(\ell+1)P_{\ell+1}-(2\ell+1)xP_\ell+\ell P_{\ell-1}=0$$

בעיות תנאי שפה עם סימטריה אזימוטלית

תנאי שפה ב"ת ב φ $\leftarrow$ $Q(\varphi)=\text{const.}$ $\leftarrow$ $m=0$
(עבור תחום $0\le\varphi\le 2\pi$)

$\leftarrow$ $P(\theta)$ - פולינום לג'נדר

הפתרון המלא נתון ע"י: $\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^{l}+B_l r^{-(l+1)}\right]\cdot P_l(\theta)$

דוגמא פשוטה

נתון כדור שהפוטנציאל על פניו $V(\theta)=V_0\cos\theta$

מה הפוטנציאל בתוכו? (הכדור חלול)   רדיוס הכדור - a

$B_l=0$ - למנוע התבדרות ב $r=0$ $\leftarrow$

$$V_0\cos\theta=\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^{l}P_l(\theta)$$

$$a^{l}A_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}P_l(\theta)\cdot V_0\cdot P_1(\theta)\,d\cos\theta=\delta_{1,l}\cdot V_0$$

מכיוון ש $P_1=\cos\theta$

$\leftarrow$ $A_1=\frac{V_0}{a}$, $A_{l\neq1}=0$.

$$\rightarrow\ \boxed{\Phi(r,\theta)=\frac{r}{a}\cdot V_0\cdot\cos\theta}$$

מה הפוטנציאל מחוץ לכדור?

$A_l=0$ - למנוע התבדרות ב $r\to\infty$

$$V_0\cos\theta=\sum_{l=0}^{\infty}B_l\,a^{-(l+1)}P_l(\theta)$$

$$\rightarrow\ a^{-(l+1)}B_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{P_l(\theta)\cdot V_0\,P_1(\theta)}_{\frac{2}{2l+1}\delta_{1,l}}\,d(\cos\theta)=\delta_{1,l}\cdot V_0$$

$B_1=V_0a^2$ $\leftarrow$

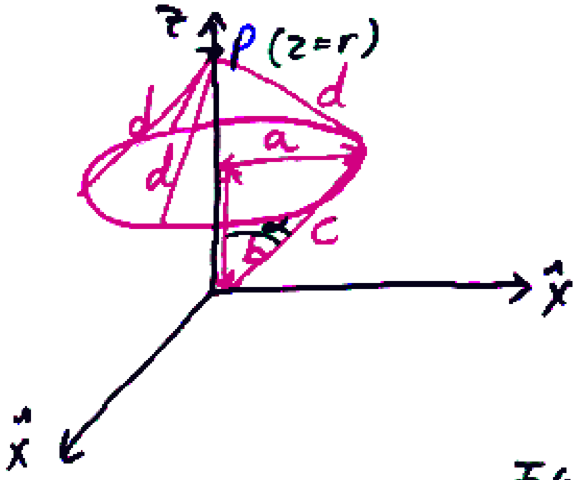
$$\boxed{\Phi(r,\theta)=V_0\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos\theta}$$

ואם $V(\theta)=V_0\cos^2\theta$?

($\cos^2\theta=\frac{2}{3}P_2+P_1$)

נכון לכל $V(\theta)$

דוגמא לא פשוטה - טבעת טעונה



מה הפוטנציאל שיוצרת במרחב טבעת טעונה?

q - סה"כ המטען, מפולג באופן אחיד.

הצורה הכללית של הפתרון

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\theta)$$

אבל מהם תנאי השפה שבאמצעותם נקבע את A_l, B_l?

תשובה: אין!

אבל... אפשר למצוא פתרון מיידי ופשוט עבור $\Phi(r,\theta=0)$

ופתרון זה ישמש למציאת A_l, B_l, בדיוק כמו שמשתמשים בתנאי שפה.

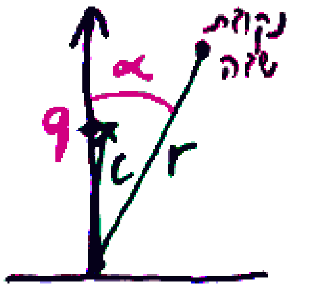
הפתרון המיידי על גבי הציר $\theta=0$:

$$\Phi(r,\theta=0)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(r^2+c^2-2cr\cos\alpha)^{1/2}}$$

וממשפט הקיום והיחידות:

$$\Phi(r,\theta=0)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]\cdot 1$$

איך נרשום את הפתרון המיידי באמצעות הסכום?



הפתרון המיידי הוא בעצם הפוטנציאל בנקודה (r,α) כתוצאה ממטען q ב $(c,0)$.

ובאופן כללי ניתן לרשום

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A'_l r^l+B'_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\alpha)$$

נקודת השדה

מיקום המטען

מוצדק מכיוון שלפוטנציאל של מטען נקודתי (על ציר $\theta=0$) יש סימטריה אזימוטלית (אין תלות ב φ).

שימו לב $A'_l\neq A_l$ אלא $A'_l P_l(\cos\alpha)=A_l$

$B'_l\neq B_l$ $\quad$ $B'_l P_l(\cos\alpha)=B_l$

איך נמצא את A_ℓ, B_ℓ ?

נפעיל את אותו "טריק" שוב. נרשום את הפתרון הכללי
את הפתרון המיוחד עבור $\alpha=0$.

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{c}|}=\frac{1}{|r-c|}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell' r^\ell+B_\ell' r^{-(\ell+1)}\right]\cdot 1$$

ונפתח את אגף שמאל בטור חזקות

<u>אם $r>c$</u>

$$\frac{1}{|r-c|}=\frac{1}{r-c}=\frac{1}{r\left(1-\frac{c}{r}\right)}=\frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{c}{r}\right)^\ell \qquad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}c^\ell\cdot\frac{1}{r^{\ell+1}}=\sum_{\ell=0}^{\infty}B_\ell' r^{-(\ell+1)}$$

$$\rightarrow A_\ell'=0\ ,\ B_\ell'=c^\ell$$

<u>אם $r<c$</u>

$$\frac{1}{|r-c|}=\frac{1}{c-r}=\frac{1}{c\left(1-\frac{r}{c}\right)}=\frac{1}{c}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^\ell$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{c^{\ell+1}}r^\ell=\sum A_\ell' r^\ell$$

$$\rightarrow A_\ell'=c^{-(\ell+1)},\ B_\ell'=0$$

מסקנה: הפוטנציאל בנקודה <u>כלשהי</u> במרחב (r,α) כתוצאה ממטען q בנקודה $(c,0)$ נתון ע"י

$$\Phi(r<c,\alpha)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^\ell}{c^{\ell+1}}\cdot P_\ell(\cos\alpha)$$

$$\Phi(r>c,\alpha)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}c^\ell r^{-(\ell+1)}P_\ell(\cos\alpha)$$

אבל, זהו בדיוק הפוטנציאל של טבעת בציר $\theta=0$ הנתון בצורה כללית ע"י:

$$\Phi(r,0)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell r^\ell+B_\ell r^{-(\ell+1)}\right]\cdot 1$$

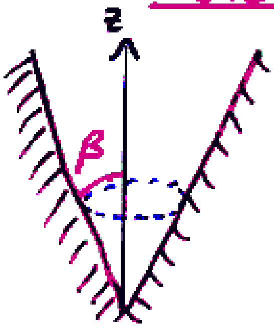
← מצאנו את A_ℓ, B_ℓ

הפתרון המלא:

$$\Phi(r<c,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r^\ell}{c^{\ell+1}}P_\ell(\cos\alpha)\cdot P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Phi(r>c,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}c^\ell r^{-(\ell+1)}P_\ell(\cos\alpha)\cdot P_\ell(\cos\theta)$$

דוגמא: מאוד לא פשוטה – מוליך בצורת קונוס



$0\le\theta\le\beta$ בניגוד לדוגמאות הקודמות

$0\le\theta\le\pi$ בהן

← הפתרונות בכיוון θ הם $P_\nu(\cos\theta)$

פונקציות (במקום פולינום) לז'נדר מהסדר הראשון

משתנה רציף

עבור $\nu=l$ מספר שלם

פונקציית לז'נדר = פולינום לז'נדר

$P_\nu(-1)$ - מתבדר, אבל $\theta=\pi$ הוא מחוץ לתחום.

P_ν מתקבל מפונקציות היפרגאומטריות (זה כיון...)

הפתרון הכללי - $\Phi(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k r^{\nu_k}P_{\nu_k}(\cos\theta)$

קרוב לפסגת

$\sigma(r)\propto r^{\nu-1}$ - צפיפות המטען על פני המוליך

כאשר $\nu\approx\frac{2.405}{\beta}-\frac{1}{2}$

עבור $\beta\to\frac{\pi}{2}$ נקבל $\sigma\to const$ (מישור טעון)

עבור $\beta\to\pi$ מקבלים $\nu\approx\frac{1}{2\ln\left(\frac{2}{\pi-\beta}\right)}$

כלומר $\nu\to 0$ (אבל לא מאוד)

← $\sigma\to r^{-1}$ - התבדרות חשובה בקצה "מחט".

שימו לב: יש טעות עקרונית בחלק ההסברים בסעיף 3.4 ב Jackson.

Spherical Harmonics – הרמוניות ספריות

$Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ - הפתרונות ב θ,φ כאשר $m\neq 0$.

הפתרונות ל $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0$

נקראים P_ℓ^m Associated Legendre functions

ℓ - מספר חיובי שלם, או אפס.

$|m|\le\ell$ - מספר שלם.

עבור $m>0$

$$P_\ell^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$$

כאשר

$$P_\ell^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(x)$$

עבור m נתון הפתרונות מהווים סט אורתוגונלי מלא המקיים:

$$\int_{-1}^{1}P_{\ell'}^m(x)P_\ell^m(x)\,dx=\frac{2}{2\ell+1}\cdot\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell,\ell'}$$

מכיון שהפתרונות ב φ $[\Phi(\varphi)]$ מהווים סט אורתוגונלי ב m ניתן להגדיר סט אורתונורמלי מלא, המאפשר לפתח כל $\psi(\theta,\varphi)$ - על פני כדור, ע"י:

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\quad,\quad Y_{\ell,-m}=(-1)^mY_{\ell m}^*$$

אורתונורמליות:

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}Y^*_{\ell'm'}Y_{\ell m}\sin\theta\,d\theta=\delta_{\ell,\ell'}\cdot\delta_{m,m'}$$

שלמות:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=\delta(\varphi-\varphi')\delta(\theta-\theta')$$

מזכורת δ
(ראו קוונטים 1)

$$\psi(x)=\sum a_n\varphi_n(x)\,,\quad a_n=\int\varphi_n^*(x')\psi(x')\,dx'$$

$$\to\psi(x)=\sum\left[\int\varphi_n^*(x')\psi(x')\,dx'\right]\varphi_n(x)=\int\underline{\sum\varphi_n^*(x')\varphi_n(x)}\,\psi(x')\,dx'\equiv\int\underline{\delta(x-x')}\,\psi(x')\,dx'$$

לדוגמא:

$l=0 \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$l=1 \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi}$

$l=2 \quad Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi}, \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}, \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$

$l=3 \quad Y_{33} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3\theta e^{3i\varphi}, \quad Y_{32} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2\theta \cos\theta e^{2i\varphi}$

$Y_{31} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin\theta (5\cos^2\theta - 1) e^{i\varphi}, \quad Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{4\pi}}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right)$

באופן כללי

$$m=0 \quad Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$$

כל פונקציה על פני כדור $g(\theta,\varphi)$ ניתן לפתח:

$$g(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) \qquad A_{lm} = \int Y^*_{lm}\, g\, d\Omega$$

(ללא קשר למשוואת לפלס)

הפתרון הכללי למשוואת לפלס בקואורדינטות ספריות

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}\right] Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

כאשר ניתן לקבוע את A_{lm}, B_{lm} אם נתון Φ ב-r מסוים

<u>משפט החיבור</u>

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

כאשר γ היא הזווית בין הכוונים θ,φ ל-θ',φ' (הוכחה ב-Jackson פרק 3.6 Arfken ופרק 12.8)

← <u>חוק הסכום</u> (עבור $\gamma=0$)

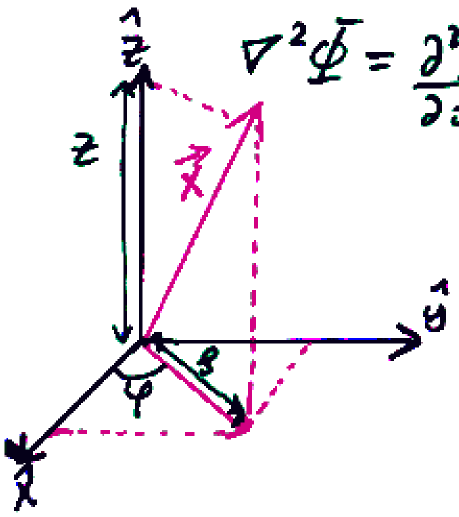
$$\sum_{m=-l}^{l} |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$$

לדוגמא: עבור $l=1$

$$|Y_{11}|^2 + |Y_{10}|^2 + |Y_{1-1}|^2 = \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta + \frac{3}{4\pi}\cos^2\theta + \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta = \frac{3}{4\pi}$$

פתרון משוואת לפלס בשלושה מימדים

קואורדינטות צילינדריות



$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

נציב

$$\Phi(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\,Q(\varphi)\,Z(z)$$

ונקבל

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + \nu^2 Q = 0$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

אם הפתרון מוגדר בתחום $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$Q = Ae^{i\nu\varphi} + Be^{-i\nu\varphi}$$

← $Q(\varphi)$ פונקציה מחזורית

כאשר ν - מספר שלם

$$Z = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

אין דרישה (בד"כ) למחזוריות בכיוון z ←

הפתרון ל R מורכב הרבה יותר

נעבור למשתנה חסר מימדים $x = k\rho$ ונקבל

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$$ — משוואת בסל

הפתרונות - פונקציות בסל מסדר ν.

פונקציות בסל מהסוג הראשון

לפתרונות

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx \qquad n>0$$

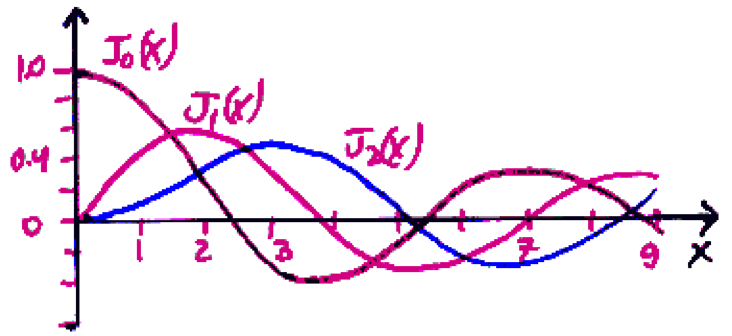
$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n = 0,1,2,\dots$$

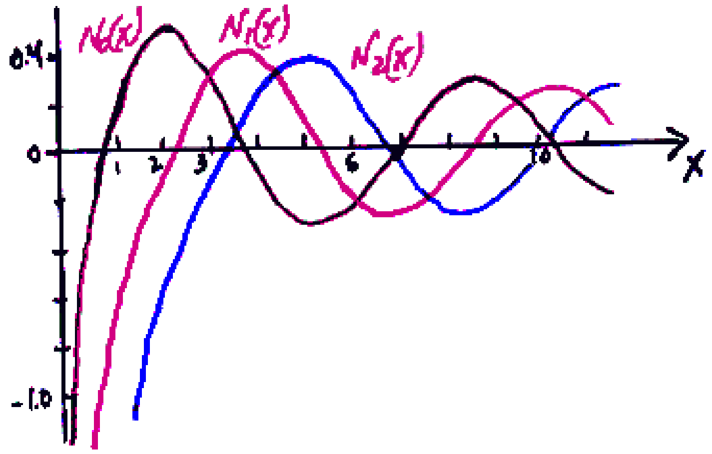
עבור $n<0$ הגדרה ע"פ $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$

אם $\nu = m$ - מספר שלם $\leftarrow J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ כלומר הפתרונות לא בלתי תלויים.

פתרון בלתי נוסף הוא פונקציות נוימן: $N_\nu(x) = \dfrac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$
(פונקציות בסל מהסוג השני)

תיאור גרפי





התנהגות אסימפטוטית

עבור $x \ll 1$

$$J_\nu(x) \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$N_\nu(x) \longrightarrow \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0.5772.. \qquad \nu = 0$$

$$\longrightarrow -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu \qquad \nu \neq 0$$

עבור $x \gg 1$

$$J_\nu(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_\nu(x) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

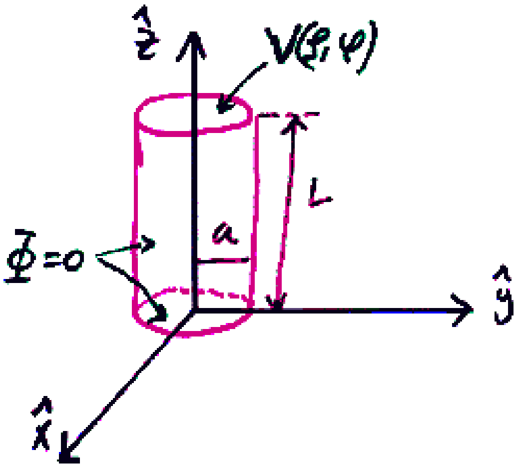
$\leftarrow$ מספר השורשים אינסופי $X_{\nu n}$ - שורש n של J_ν $\quad J_\nu(X_{n\nu}) = 0$

באופן אסימפטוטי:
$$X_{\nu n} \approx n\pi + \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

שונות

J_ν - סט אורתוגונלי מלא. מאפשר לפתח פונקציה בתחום $0 \le \rho \le a$
ע"י טורי בסל-פוריה, או בתחום $0 \le \rho \le \infty$ ע"י טרנספורם Hankel
(להרחבה ראה Arfken - Mathematical Methods for Physicists, ch.11)

דוגמא: בעיית תנאי שפה בקואורדינטות צילינדריות



$$\Phi = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$$

מתנאי המחזוריות ב φ נקבל

$$Q(\varphi)=A\sin(m\varphi)+B\cos(m\varphi)$$

מהתנאי $\Phi(\rho,\varphi,0)=0$

נקבל $Z(z)=\sinh(kz)$

והפתרון הרדיאלי: $R(\rho)=C J_m(k\rho)+D N_m(k\rho)$, $\nu=m$ מספר שלם (מהפתרון Q)

מכיוון ש $0\le\rho\le a$ (הבעיה כלולה בפנים) $\leftarrow D=0$

מכיוון ש $\Phi(a,\varphi,z)=0 \leftarrow R(a)=0$

כלומר $k_{mn}=\frac{x_{mn}}{a}$, כאשר x_{mn} - השורש ה n של J_m

הפתרון הכללי:

$$\Phi(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho)\sinh(k_{mn}z)\left[A_{mn}\sin(m\varphi)+B_{mn}\cos(m\varphi)\right]$$

שימו לב: $J_m(x)$ - סדרת פונקציות התלויות ב m בלבד. אבל למשוואת בסל תלויה ב 2 פרמטרים, $\nu(=m)$! k, כאשר k "נבלע" במעבר למשתנה חסר המימד x. במעבר חזרה למשתנה הפיזיקלי ρ מופיע $k(=k_{mn})$ "מתקדש" $\leftarrow$ סכום כפול (כמו שקבלנו בבעיה המקבילה בקואורדינטות קרטזיות).

חישוב המקדמים

$$V(\rho,\varphi)=\sum_{m,n}\sinh(k_{mn}L)\,J_m(k_{mn}\rho)\left[A_{mn}\sin(m\varphi)+B_{mn}\cos(m\varphi)\right] \leftarrow$$ נציב את תנאי השפה

= פיתוח בטור פורייה ב φ ובטור בסל-פורייה ב ρ.

מהאורתוגונליות + שלמות של פונקציות בסל נקבל

$$A_{mn}=\frac{2\,\mathrm{cosech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J^2_{m+1}(k_{mn}a)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a \rho\, V(\rho,\varphi)\,J_m(k_{mn}\rho)\sin(m\varphi)\,d\rho$$

$B_{mn}=$ " " " " " $\cos(m\varphi)$ "