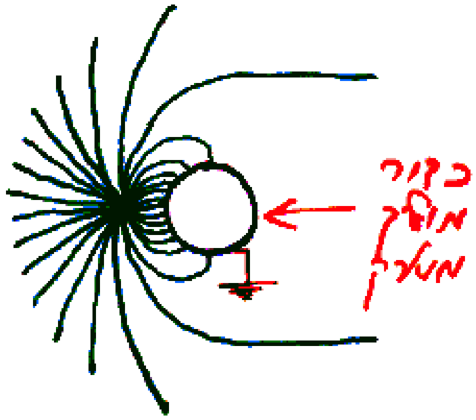
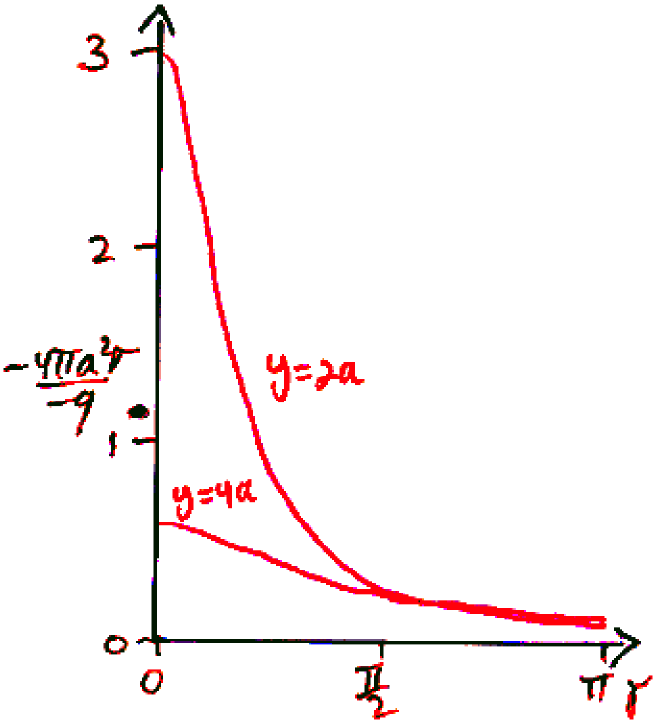
התפלגות קוי השדה



התפלגות צפיפות המטען



המטען המושרה הכולל:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\pi}\sigma(y,r)\,a^2\,d\varphi\,d\cos r=-\frac{a}{y}q=q'=$$ מטען הדמות

ההתאמה לחוק גאוס

מהו הכוח הכולל בין המטען q לכדור?

$f=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ — הכוח ליחידת שטח הפועל בניצב לפני הכדור (לאורך קוי השדה)

$$\to F=\int_1^{-1}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\cdot\cos r\cdot a^2\cdot 2\pi\cdot d\cos r=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{a}{y}\right)^2\left(1-\left(\frac{a}{y}\right)^2\right)^2\int_1^{-1}\frac{\cos r\,d\cos r}{\left(1+\frac{a^2}{y^2}-\frac{2a\cos r}{y}\right)^3}$$

רכיב הכוח בכיוון המטען q

אינטגרציה $d\varphi$

$$\to F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{a}{y}\right)^3\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)^{-2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot q'}{(y-y')^2}$$ ← הכוח בין המטען q למטען הדמות q'

או לחילופין, נמצא את השדה ב $\vec{y}$ $\qquad \vec{E}(\vec{y})=-\vec{\nabla}\Phi(\vec{y})$

ונקבל את הכוח על המטען q הנמצא ב $\vec{y}$: $\qquad \vec{F}=q\cdot\vec{E}$

מטען נקודתי סמוך לכדור מוליך טעון ומבודד

Q – המטען הכולל על פני הכדור

q – המטען הנקודתי הסמוך לכדור

במטען q ישרה מטען q' על פני הכדור בהתפלגות שחושבה קודם, השארית $Q-q'$ צריכה להתפלג כך שישמר פוטנציאל אחיד בפני הכדור ← התפלגות אחידה

הפוטנציאל מחוץ לכדור המוליך הוא לכן:

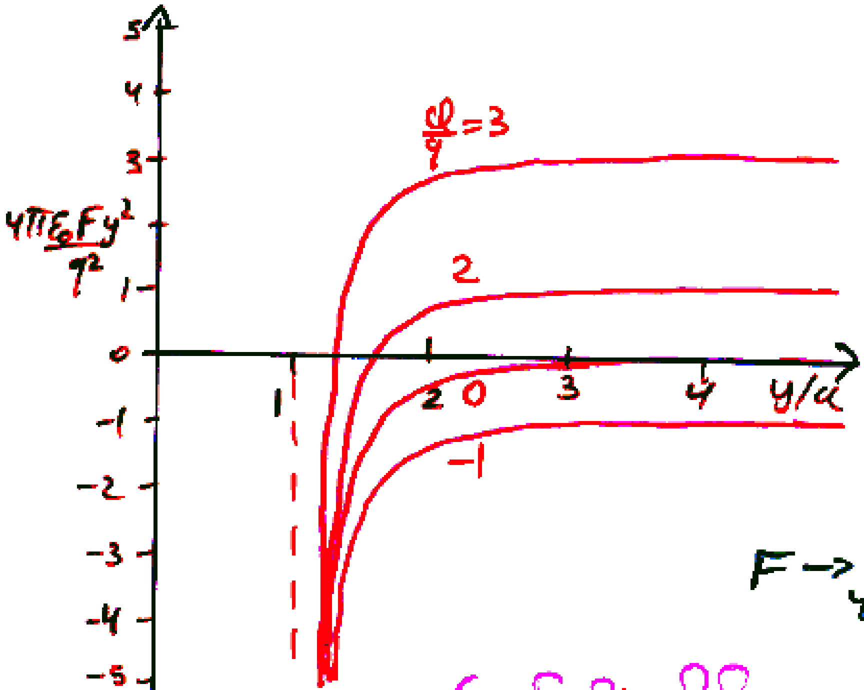
$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{aq}{y\left|\vec{x}-\frac{a^2}{y^2}\vec{y}\right|} + \frac{Q+\frac{a}{y}q}{|\vec{x}|}\right]$$

תרומת המטען q מחוץ לכדור

תרומת המטען q' המושרה (התפלגות לא אחידה על פני הכדור)

תרומת השארית $Q-q'$ (המתפלגת באופן אחיד על פני הכדור)

תלות הכוח ב $\frac{Q}{q}$ ובמרחק $\frac{y}{a}$



והכוח על המטען q ($\vec{x}=\vec{y}$) בנקודה? הוא:

$$F(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-aq}{y\left(y-\frac{a^2}{y^2}y\right)^2} + \frac{Q+\frac{a}{y}q}{y^2}\right]$$

בכיוון $\hat{y}$ $\quad (\vec{y} = y\cdot\hat{y})$

$$\rightarrow F(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{y^2}\left[Q - \frac{qa^3(2y^2-a^2)}{y(y^2-a^2)^2}\right]$$

עבור $y \gg a$ $\quad F \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{y^2}$

עבור $\frac{y}{a}=1+\varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, F – תמיד שלילי (לכל Q)

מתקשר לפונקציית העבודה של מתכת (האומנם?)

מטען נקודתי סמוך לכדור מוליך בפוטנציאל נתון

V - הפוטנציאל הנתון על פני הכדור.

פתרנו כבר עבור כדור מוארק, כלומר $V=0$. נוסיף מטען דמות במרכז הכדור שיתן פוטנציאל V על פניו.

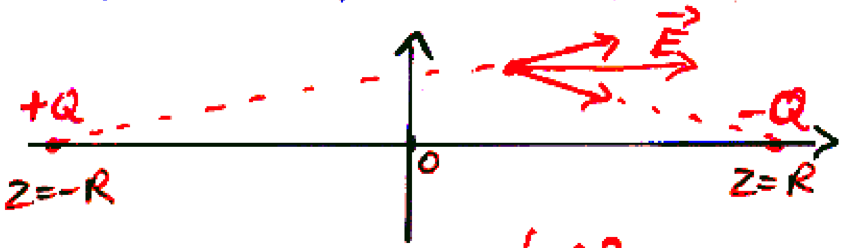
$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{aq}{y\left|\vec{x}-\frac{a^2}{y^2}\vec{y}\right|}\right] + \frac{Va}{|\vec{x}|}$$

פוטנציאל זהה לבעיה הקודמת עבור $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a}+\frac{q}{y}\right)$

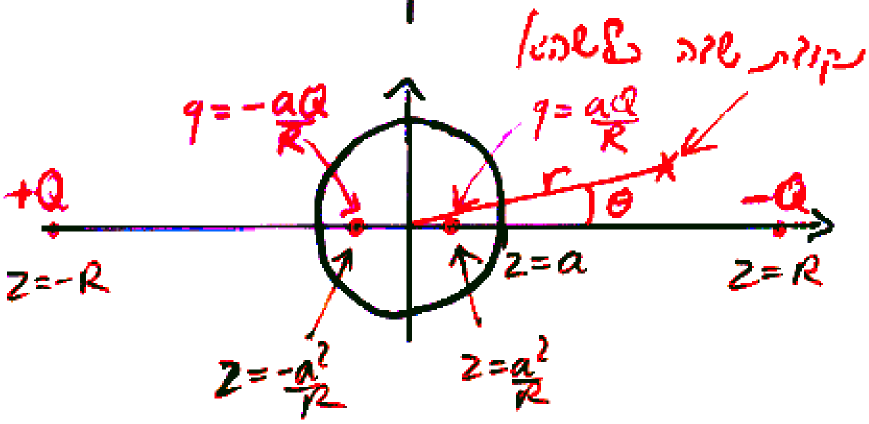
כדור מוליך המוכנס לתוך שדה חשמלי אחיד

"ניצור" שדה אחיד ע"י שני מטענים מנוגדים, ואז נשתמש בשיטת הדמויות.

בלי הכדור:



עם הכדור:



סמוך לראשית $z \ll R$

השדה הוא בקירוב $E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{R^2} = E_0$

נניח $Q, R \to \infty$ כאשר $Q/R^2 = const$ $\Leftarrow$ $E = E_0$

$$4\pi\varepsilon_0\Phi(r,\theta)=\frac{Q}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\theta}}-\frac{Q}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}$$

$$-\frac{aQ}{R\sqrt{r^2+\frac{a^4}{R^2}+2\frac{a^2r}{R}\cos\theta}}+\frac{aQ}{R\sqrt{r^2+\frac{a^4}{R^2}-2\frac{a^2r}{R}\cos\theta}}$$

בגבול ש: $r\ll R$ נקרב $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\approx 1-\frac{1}{2}x\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\theta}}=\frac{1}{R\sqrt{1+\left(\frac{r}{R}\right)^2+2\frac{r}{R}\cos\theta}}\approx\frac{1}{R}\left(1-\frac{r}{R}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{R\sqrt{r^2+\frac{a^4}{R^2}+2\frac{a^2r}{R}\cos\theta}}=\frac{1}{Rr\sqrt{1+\frac{a^4}{R^2r^2}+2\frac{a^2}{Rr}\cos\theta}}\approx\frac{1}{Rr}\left(1-\frac{a^2}{Rr}\cos\theta\right)$$

ונקבל סה"כ

$$4\pi\varepsilon_0\Phi(r,\theta)=\frac{Q}{R}\left(1-\frac{r}{R}\cos\theta\right)-\frac{Q}{R}\left(1+\frac{r}{R}\cos\theta\right)-\frac{aQ}{Rr}\left(1-\frac{a^2}{Rr}\cos\theta\right)+\frac{aQ}{Rr}\left(1+\frac{a^2}{Rr}\cdot\right)$$

$$=-\frac{2Q}{R^2}r\cos\theta+\frac{2Qa^3}{R^2r^2}\cos\theta$$

מכיון ש: $E_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{R^2}$

נקבל:

$$\Phi(r,\theta)=-E_0\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

כאשר $E_0r\cdot\cos\theta=E_0\cdot z$ - התרומה לפוטנציאל מהשדה החיצוני האחיד

הפוטנציאל של דיפול חשמלי D - $E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$ - התרומה לפוטנציאל מהמטען המושרה על פני הכדור

עבור דיפול:

$+q \overset{d}{\longleftrightarrow} -q$ $\quad D=q\cdot d$

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{D}{r^2}$$

מומנט הדיפול: $D=\frac{Qa}{R}\cdot\frac{2a^2}{R}$

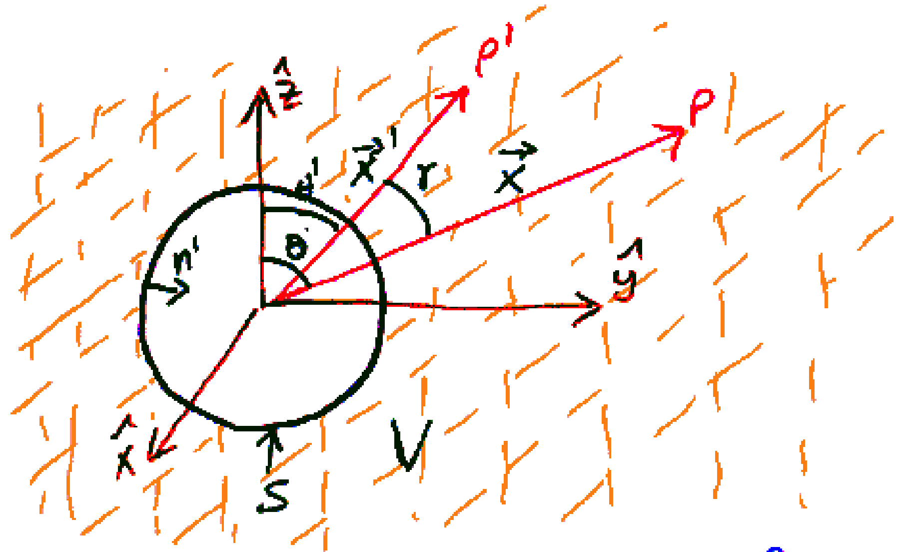
המטען המושרה:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=-E_0\left(1+\frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\theta\ ,\qquad \sigma=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=a}=3\varepsilon_0E_0\cos\theta$$

$$\rightarrow Q=2\pi a^2\int_{-1}^{1}3\varepsilon_0E\cos\theta\,d\cos\theta=0$$

(כדור מוארק או מבודד ישנו לגבי תגובה)

פתרון כללי לכדור מוליך באמצעות פונקצית גרין



מה הקשר בין שיטת הדמויות לפונקצית גרין ?

כיצד נמצא את $\Phi(\vec{x})$ כאשר נתון $\Phi(|\vec{x}|=a)$?

הפוטנציאל על פני כדור ברדיוס a.

בעיית Dirichlet, מהו $G_D(\vec{x},\vec{x}')$?

תזכורת:

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + F(\vec{x},\vec{x}')$$

$$\nabla'^2 F(\vec{x},\vec{x}') = 0 \qquad G_D(\vec{x},\vec{x}') = 0$$ על S

תשובה:

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{a}{x'\left|\vec{x}-\frac{a^2}{x'^2}\vec{x}'\right|}$$ ← הפתרון שמצאנו

בשיטת הדמויות לפוטנציאל מחוץ לכדור מוליך מוארק + מטען יחידה ב-$\vec{x}'$ מקיים את כל התנאים, בהנחה ש V הנו הנפח שמחוץ לכדור ! S הנו המשטח "העוטף" נפח זה.

(מה התרומה לפוטנציאל גרין מהמשטח הנוסף הדרוש "לעטוף" את V?)

בקואורדינטות ספריות

הזווית בין $\vec{x}'$ ל $\vec{x}$

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{\sqrt{x^2+x'^2-2xx'\cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2x'^2}{a^2}+a^2-2xx'\cos\gamma}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\cdot\frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|} = [\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta]\cdot[\sin\theta'\cos\varphi', \sin\theta'\sin\varphi', \cos\theta']$$

$$= \sin\theta\sin\theta'(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi') + \cos\theta\cos\theta'$$

$$= \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\theta\cos\theta'$$

הפתרון נתון ע"י:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\,G_D(\vec{x},\vec{x}')\,d^3x' - \frac{1}{4\pi}\int_S \Phi(\vec{x}')\,\frac{\partial G_D}{\partial n'}\,da'$$

התפלגות המטען בנפח V

← צריך לחשב את $\frac{\partial G_D}{\partial n'}$ על פני הכדור

$\hat{n}'$ - הוקטור הניצב למשטח הוא בכיוון הראשית (כלפי פנים הכדור)

$$\left.\frac{\partial G_D(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}\right|_{|\vec{x}'|=a} = \frac{-(x^2-a^2)}{a(x^2+a^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}}$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')\,x'^2dx'\,d\Omega'}{\sqrt{x^2+x'^2-2xx'\cos\gamma}} - \int_V \frac{\rho(\vec{x}')\,x'^2dx'\,d\Omega'}{\sqrt{\frac{x^2x'^2}{a^2}+a^2-2xx'\cos\gamma}}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_S \Phi(a,\theta',\varphi')\,\frac{(x^2-a^2)\cdot a^2\,d\Omega'}{a(x^2+a^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}}$$

מאפשר לקבל מ: $\rho(\vec{x}') + \Phi(a,\theta',\varphi')$ את: $\Phi(\vec{x})$ - בתוך V

$\rho(\vec{x}')$ - בתוך V

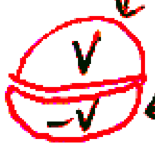
$\Phi(a,\theta',\varphi')$ - על S

דוגמא פשוטה (ככל האפשר...)

נניח $\rho(\vec{x})=0$ ← שני ה $\int_V$ מתאפסים

+ $\Phi(S)=\text{const}$ ← פשוט מדי

נניח במקום זאת: $\Phi(0<\theta<\frac{\pi}{2})=+V\,,\ \Phi(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)=-V$



$$\Phi(\vec{x}) = \frac{V}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\left[\int_0^1 d\cos\theta' - \int_{-1}^0 d\cos\theta'\right]\cdot\frac{a(x^2-a^2)}{(a^2+x^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}}$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{Va(x^2-a^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^1 d\cos\theta'\left[\frac{1}{(a^2+x^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+x^2+2ax\cos\gamma)^{3/2}}\right]$$

מסובך מדי! (בגלל התלות המורכבת של γ ב θ',φ')

26

נמצא את הפתרון על ציר z בלבד?

$\leftarrow$ $\theta=0$, $\gamma=\theta'$ האינטגרל פתיר ונקבל

$$\Phi(z) = V\left[1 - \frac{(z^2-a^2)}{z\sqrt{z^2+a^2}}\right]$$

ניתן לקבל פתרון מקורב ל $\Phi(\vec{x})$ ע"י פיתוח האינטגרנד בטור

$$\frac{1}{(a^2+x^2+2ax\cos\gamma)^{3/2}} = \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\frac{1}{(1+2\alpha\cos\gamma)^{3/2}} \qquad \alpha \equiv \frac{ax}{a^2+x^2}$$

$$\frac{1}{(1-2\alpha\cos\gamma)^{3/2}} - \frac{1}{(1+2\alpha\cos\gamma)^{3/2}} \approx 6\alpha\cos\gamma + 35\alpha^3\cos^3\gamma + \dots$$

חזקות אי זוגיות בלבד של $\alpha\cos\gamma$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos\theta')\cos\gamma = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int \left[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\right] d\cos\theta'$$

$$= \pi\cos\theta$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d(\cos\theta')\cos^3\gamma = \frac{\pi}{4}\cos\theta\cdot(3-\cos^2\theta)$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{x}) \approx \frac{3Va^2}{2x^2}\frac{x^3(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^{5/2}}\cos\theta\left[1 + \frac{35}{24}\frac{a^2x^2}{(a^2+x^2)^2}(3-\cos^2\theta) + \dots\right]$$

עבור $x \gg a$ נקבל

$$\Phi(\vec{x}) \approx \frac{3Va^2}{2x^2}\left[\cos\theta - \frac{7a^2}{12x^2}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right) + \dots\right]$$

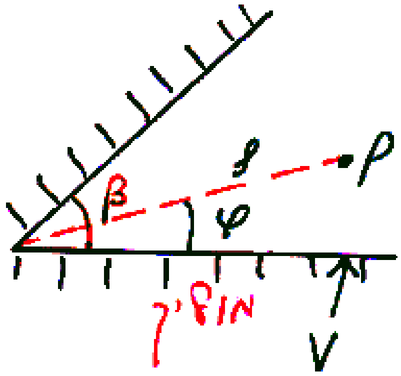
סדרה המתכנסת במהירות עבור $x \gg a$

לדוגמא: עבור $\frac{x}{a}=5$ האיבר השני קטן פי ~ 50 מהאיבר הראשון.

האיבר הראשון מתאים לפוטנציאל של דיפול עם $D = \frac{3}{2}Va^2$

פתרון משוואת לפלס בשני מימדים

מהו השדה והתפלגות המטען בפינות?



הפינה נוצרת ע"י 2 מישורים
מוליכים בזווית β. בינהם.

אין מטען בפנים ← $\nabla^2\Phi=0$

[illegible] ← בעיה דו מימדית

בחירת המשתנים ← קואורדינטות פולריות ρ,φ.

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0$$

נשתמש בהפרדת משתנים
(מד"ח ← מד"ר)

$$\Phi(\rho,\varphi)=R(\rho)\cdot F(\varphi)$$

$$\rightarrow\ \frac{F}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{R}{\rho^2}\frac{d^2F}{d\varphi^2}=0\ \rightarrow\ \underbrace{\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}_{\text{תלות ב } \rho \text{ בלבד}}=\underbrace{-\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\varphi^2}}_{\text{תלות ב } \varphi \text{ בלבד}}$$

תלות ב ρ בלבד

תלות ב φ בלבד

← כל אחד מהאגפים = קבוע, נסמן ב ν^2.

פתרון המשוואה ל R

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)=\nu^2$$

נשתמש בפתרון בצורת פולינום

$$R(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\rho^n$$

ונציבו במשוואה ל R

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}=R\nu^2$$

$$\frac{dR}{d\rho}=\sum_{n=1}^{\infty}nC_n\rho^{n-1}\qquad \frac{d^2R}{d\rho^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_n\rho^{n-2}$$

$$\rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_n\rho^n+\sum_{n=1}^{\infty}nC_n\rho^n=\sum_{n=0}^{\infty}\nu^2C_n\rho^n$$

משוואת המקדמים ל ρ^n נקבל

$$n(n-1)+n=\nu^2\ \longrightarrow\ n=\pm\nu$$

$$\rightarrow\ \underline{R(\rho)=a_\nu\rho^\nu+b_\nu\rho^{-\nu}}$$

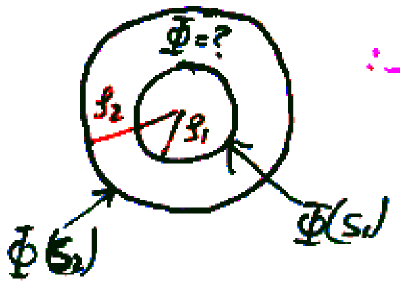
מה עם האפשרות $\nu=0$?

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)=0 \to \rho\frac{dR}{d\rho}=b_0 \to R(\rho)=a_0+b_0\ln(\rho)$$

פתרון המשוואה ל F

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2}+\nu^2F=0 \to F(\varphi)=A\cos(\nu\varphi)+B\sin(\nu\varphi)$$

עבור $\nu=0$ נקבל $F(\varphi)=A_0+B_0\varphi$



עבור פתרון עם גיאומטריה מהצורה הכללית:

$\rho_1<\rho<\rho_2 \qquad 0\le\varphi\le2\pi$

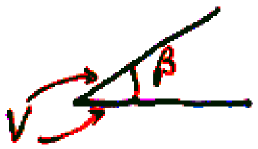
נדרוש פתרון מחזורי

← ν - מספר שלם (לא לוג), $B_0=0$

והצורה הכללית של הפתרון תהיה: (סופרפוזיציה של כל הפתרונות)

$$\Phi(\rho,\varphi)=\overbrace{a_0+b_0\ln(\rho)}^{F\cdot R \text{ עבור } \nu=0}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho^n\sin(n\varphi+\alpha_n)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\rho^{-n}\sin(n\varphi+\beta_n)$$

$(A\cos\ldots+B\sin\ldots)\cdot\rho^{\pm n}$ דרך קומפקטית לרשום



במקרה שבו הגיאומטריה היא:

כלומר $0\le\varphi\le\beta$, $0\le\rho<\infty$

← למנוע התבדרות ב $\rho=0$ נדרוש: $b_0=b_n=0$

מתנאי השפה $\Phi(\varphi=\beta)=\Phi(\varphi=0)=V$ — לכל ρ

← $B_0=0$

בנוסף, אם $A\neq0$ אז עבור $\varphi=0$ הפתרון יכיל

לאברים: $A\cdot1\cdot a_n\rho^n=f(\rho)\neq const.$ ← $A=0$

אם התלות של Φ ב ρ מתקיים גם ב $\varphi=\beta$?

← $B\sin(\nu\beta)=0$ ← $\nu=\frac{m\pi}{\beta}$ $\quad m=1,2,\ldots$

(מדוע לא $B=0$?)

ב. $\rho=\varphi=0$ התרומות היחידים שאינם מתאפסים

ה.מ $F=A_0$, $R=a_0$ $\leftarrow$ $\Phi = R\cdot F = A_0 \cdot a_0 = V$

תנאי השפה

<u>בצורה הכללית של הפתרון הנ"ל:</u>

$$\Phi = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{m\pi\varphi}{\beta}\right)$$

עבור $V=0$ עבור $V\neq 0$

מכאן הפתרון שלו חד ערכי? (a_m לא נקבעו)
חסר תנאי שפה $\Phi(\varphi)$ ב- ρ_b כלשהו.

קרוב מספיק לראשית $(\rho \ll \rho_b)$ נקבל בקרוב

$$\Phi(\rho,\varphi) \approx V + a_1 \rho^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{\pi\varphi}{\beta}\right)$$

(בהינתן תנאי השפה ב ρ_b לא קובעים $a_1=0$, נניח בד"כ)

<u>מבנה התפלגות המטען המשטחי קרוב לפינה?</u>

נמצא את השדה במרחב

$\left(\vec\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat\varphi\right.$ בקואורדינטות פולריות $\left.\right)$

$$\rightarrow E_\rho(\rho,\varphi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = -\frac{\pi a_1}{\beta}\rho^{\frac{\pi}{\beta}-1}\sin\left(\frac{\pi\varphi}{\beta}\right) \rightarrow$$

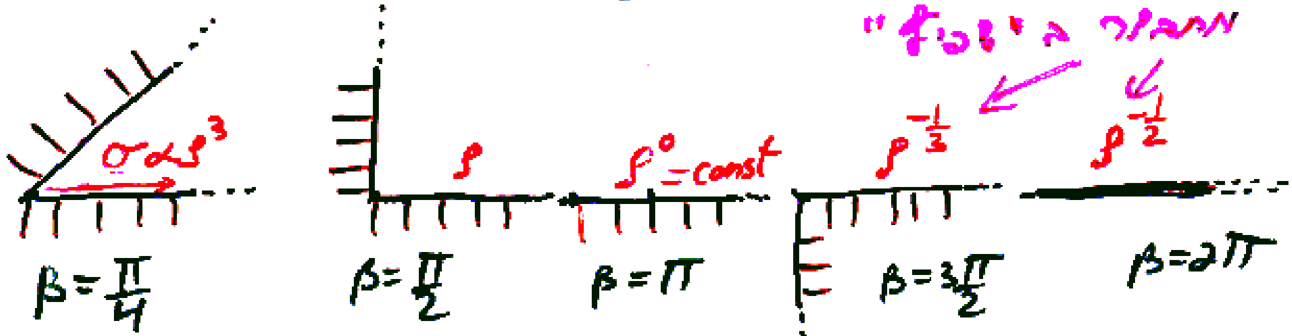
על פני המשטחים $E_\rho(\rho,0)=E_\rho(\rho,\beta)=0$

$$E_\varphi(\rho,\varphi) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\pi a_1}{\beta}\rho^{\frac{\pi}{\beta}-1}\cos\left(\frac{\pi\varphi}{\beta}\right)$$

השדה ניצב למשטחים ← בכיוון $\hat\varphi$
וצפיפות המטען:

$$\sigma(\rho) = \varepsilon_0 E_\varphi(\rho,0) = \underbrace{-\varepsilon_0\frac{\pi a_1}{\beta}}\rho^{\frac{\pi}{\beta}-1}$$

מתבדר ב"פינה"



פתרון משוואת לפלס בשלושה מימדים

קואורדינטות קרטזיות

$\Phi(V)=?$ $\Longleftarrow$ $\rho(V)=0$ + נתון - $\Phi(S)$

מה קובע באיזו מערכת קואורדינטות נפתור?

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

משוואה דיפרנציאלית חלקית.

נהפוך ל 3 משוואות דיפרנציאליות רגילות ע"י הפרדת משתנים

$$\Phi(x,y,z)=X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$$

נציב, ונחלק ב $X\cdot Y\cdot Z$ ונקבל:

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}}_{\text{פונ' של } x \text{ בלבד}}+\underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}}_{\text{פונ' של } y \text{ בלבד}}+\underbrace{\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}}_{\text{פונ' של } z \text{ בלבד}}=0$$

המשוואה נכונה לכל x,y,z $\Leftarrow$ כל איבר = קבוע

$$\rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\alpha^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\beta^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\alpha^2+\beta^2$$

$$\Phi=\sum e^{\pm i\alpha x}e^{\pm i\beta y}e^{\pm\gamma z}$$

$$\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

+ איברים מנוונים a_0x+b_0, c_0y+d_0, ... המתקבלים עבור $\alpha=0$, $\beta=0$, ...

בפתרון יהיה לכן מהצורה הכללית: כאשר הצורה המדויקת נקבעת לפי תנאי השפה.

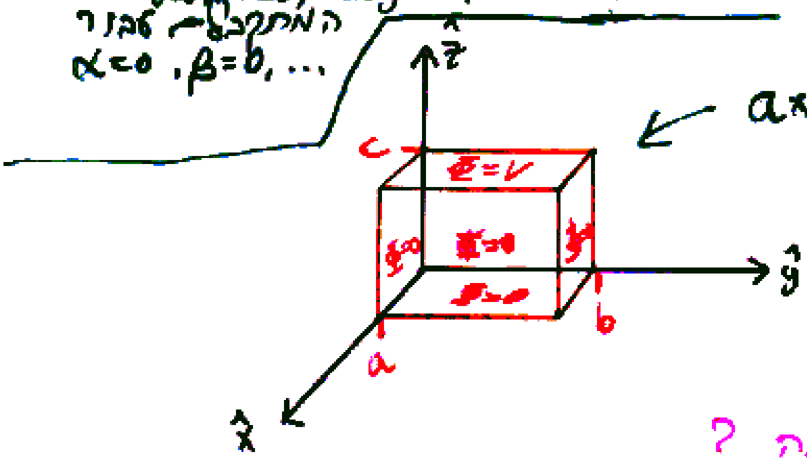
דוגמא:

נתונה תיבה שמימדיה $a\times b\times c$

כל הדפנות ב $\Phi=0$

למעט הדופן העליונה

$$\Phi(x,y,c)=V(x,y) \qquad 0\le x\le a,\ 0\le y\le b$$



מהו $\Phi(x,y,z)$ בתוך התיבה?

מתנאי השפה: $\Phi(0,y,z)=\Phi(x,0,z)=\Phi(x,y,0)=0$

ותנאי השפה הנוסף: $\Phi(a,y,z)=\Phi(x,b,z)=0$

נקבל

$$X_n=\sin(\alpha_n x) \qquad Y_m=\sin(\beta_m y) \qquad Z_{mn}=\sinh(\gamma_{nm} z)$$

$$\alpha_n=\frac{n\pi}{a}\ , \qquad \beta_m=\frac{m\pi}{b}\ , \qquad \gamma_{nm}=\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$

n, m – מספרים שלמים.

הצורה הכללית של הפתרון היא

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sin(\alpha_n x)\cdot\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm} z)$$

והקבועים A_{nm} מתקבלים מתנאי השפה האחרון $\Phi(x,y,c)=V(x,y)$

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{A_{nm}\sinh(\gamma_{nm}c)}_{\text{קבוע}}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)$$ – שווה ערך לפיתוח $V(x,y)$ בטור פורייה

$$A_{nm}=\frac{4}{ab\sinh(\gamma_{nm}c)}\int_0^a\left[\int_0^b V(x,y)\sin(\beta_m y)\,dy\right]\sin(\alpha_n x)\,dx$$ ← הדרך לקבל את המקדמים בפיתוח.

ומה קורה אם $\Phi\neq 0$ על הדפנות האחרות?

(ומה קורה אם $\Phi(x,y,c)=V_0$?)

לאלו תנאי שפה נקבל פתרון עם $\alpha=\beta=\gamma=0$?

פתרון משוואת לפלס בשלושה מימדים

קואורדינטות ספריות

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

ננסה הפרדת משתנים
(1 מד"ח ← 3 מד"ר)

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r}\cdot P(\theta)\cdot Q(\varphi)$$

מציבה במשוואת לפלס נקבל:

$$PQ\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{UP}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0$$

נכפיל ב $r^3\sin^2\theta/UPQ$ ונקבל:

$$\underbrace{r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right]}_{\text{פונ' של } r,\theta} = \underbrace{-\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}}_{\text{פונ' של } \varphi \text{ בלבד}} = const$$

המשוואה ל Q

נסמן את הקבוע ב m^2 ←

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + m^2Q = 0$$

$$\to \quad Q = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}$$

אם מרחב הפתרון כולל $0 \le \varphi \le 2\pi$
נקבל מתנאי המחזוריות $Q(\varphi) = Q(\varphi+2\pi) \rightarrow e^{im\cdot 2\pi} = 1$

↳ m - מספר שלם

עבור U ו P נשארה המשוואה

$$\frac{r^2\sin^2\theta}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) = m^2$$

$$\to \underbrace{\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2}}_{\text{פונ' של } r \text{ בלבד}} + \underbrace{\frac{1}{\sin\theta\cdot P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}}_{\text{פונ' של } \theta \text{ בלבד}} = 0$$