יחידות הפתרון למשוואת פואסון

מהם תנאי השפה הדרושים על מנת להבטיח
1. קיום פתרון 2. חד ערכיות הפתרון ?

עבור משוואת פואסון (משוואה לפלאס)
יש שתי אפשרויות:

1. תנאי השפה של Dirichlet ← $\Phi(s)$ משטח סגור
2. תנאי השפה של Neumann ← $\frac{\partial \Phi(s)}{\partial n}$

הוכחה

הוכחה של דרך השלילה. נניח שקיימים שני פתרונות

Φ_1, Φ_2 למשוואת פואסון

$$\nabla^2 U = 0 \leftarrow U \equiv \Phi_2 - \Phi_1$$

נשתמש בזהות הראשונה של גרין, כאשר $\varphi = \psi = U$

$$\int_V \left(U \nabla^2 U + \vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U \right) d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} da$$

$$\rightarrow \int_V (\vec{\nabla} U)^2 d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} da$$

1. עבור תנאי Dirichlet $U=0$ על s.
2. עבור תנאי Neumann $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ על s.

$$\rightarrow \int_V (\vec{\nabla} U)^2 d^3x = 0 \rightarrow \vec{\nabla} U = 0 \text{ – בכל נקודה בנפח } V$$

$$\rightarrow U = C \text{ – קבוע}$$

← הפתרון חד ערכי עד כדי קבוע (תאוצה נתון עבור Φ) C (חסר משמעות פיזיקלית)

* קביעת $\Phi(s)$! $\frac{\partial \Phi(s)}{\partial n}$ בו זמנית ← בד"כ אין פתרון

פתרון בעיות תנאי שפה באלקטרוסטטיקה באמצעות פונקצית גרין

משפט גרין - קובעת $\Phi(\vec{x})$ ע"פ $\rho(\vec{x})|_V$, $\Phi(s)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial n}(s)$
"עודף" של תנאי שפה.

? כיצד נקבל את $\Phi(\vec{x})$ רק באמצעות $\rho(\vec{x})|_V$! $\Phi(s)$
או $\rho(\vec{x})|_V$! $\frac{\partial\Phi}{\partial n}(s)$

השתמשנו ב $\psi = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ כך ש $\nabla^2\psi \propto \delta$

אבל משפט גרין מתקיים לכל $G(\vec{x},\vec{x}')$ נתון המקיים

$$\nabla'^2 G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

למשל ניתן לבחור $G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + F(\vec{x},\vec{x}')$ - פונקצית גרין

כך שמתקיים: $\nabla'^2 F(\vec{x},\vec{x}') = 0$ - משוואת לפלס

נשתמש ב"דרגת החופש" הנוספת $F(\vec{x},\vec{x}')$ על מנת לבטל את אחד האיברים ה"אסורים" $\left[\Phi(w),\ \text{או}\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}(w)\right]$ במשפט גרין.

נציב $\psi = G$, $\phi = \Phi$ במשפט גרין

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\,G(\vec{x},\vec{x}')\,d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\left[G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi(\vec{x}')\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}\right]da'$$

עבור תנאי השפה של Dirichlet נדרוש

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = 0 \quad \text{for } \vec{x}'|_S$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')\,G(\vec{x},\vec{x}')\,d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\vec{x}')\frac{\partial G}{\partial n'}(\vec{x},\vec{x}')\,da'$$

איפסנו את האיבר הכולל ב $\oint_S$ - אינטגרל המשטחי.

נבחר תנאי השפה של Neumann

נרצה לאפס את האבר השני באינטגרל המשטחי

$\leftarrow$ $\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x},\vec{x}')=0$ עבור $\vec{x}'|_S$

אבל עפ"י משפט גאוס

$$\oint \frac{\partial G_N}{\partial n'}\, da = \oint \vec{\nabla} G_N \cdot \vec{n}\, da = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} G_N\, dv = \int \nabla^2 G_N\, dv = \int -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\, dv = -4\pi$$

$\leftarrow$ אי אפשר לדרוש $\frac{\partial G_N}{\partial n'}=0$ בכל נקודה על S.

ההנחה הפשוטה ביותר האפשרית $\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{x},\vec{x}')\Big|_S = C = -\frac{4\pi}{S}$

$\leftarrow$ האבר השני באינטגרל המשטחי יתן

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\vec{x}')\frac{\partial G_N}{\partial n'}\, da' = -\frac{1}{4\pi}\int \Phi(\vec{x}')\cdot\frac{-4\pi}{S}\, da' = \frac{1}{4\pi}\int \Phi(\vec{x}')\, da = \langle\Phi\rangle_S$$

הערך הממוצע של Φ על פני המשטח S.

והפתרון בהנחת תנאי השפה של Neumann הוא:

$$\Phi(\vec{x}) = \langle\Phi\rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')G_N(\vec{x},\vec{x}')\, d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial\Phi}{\partial n'}G_N(\vec{x},\vec{x}')\, da'$$

$\leftarrow$ מצאנו דרך לחשב את $\Phi(\vec{x})$

באמצעות $G_0(\vec{x},\vec{x}'),\ \Phi(S),\ \rho(\vec{x})|_V$

או באמצעות $G_N(\vec{x},\vec{x}'),\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}(S),\ \rho(\vec{x})|_V$

נותרה "רק" הבעיה למצוא את $G_0(\vec{x},\vec{x}')$ המקיימת $G_0(S)=0$

או $G_N(\vec{x},\vec{x}')$ המקיימת $\frac{\partial G_N}{\partial n'}\Big|_S = C$

שימו לב:

פונקציות גרין לא תלויות בתנאי השפה המסוימים של הבעיה $[\Phi(S), \frac{\partial\Phi}{\partial n}(S)]$ או בהתפלגות המטען $[\rho(\vec{x})|_V]$

התלות היא בקיום תנאי שפה במשטחים על S

האנרגיה הפוטנציאלית האלקטרוסטטית

האנרגיה הדרושה להביא q_i מ ∞ ל $\vec{x}_i$. - $W_i = q_i \Phi(\vec{x}_i)$

עבור התפלגות מטען $q_j,\ j=1\ldots n-1$

$$\Phi(\vec{x}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{q_j}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|}$$

נקבל

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{q_j}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|}$$

האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת של כל מערכת המטענים היא

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}\frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|}$$

למנוע ספירה כפולה - או חלק בנות ההתפלגות

או ברישום סימטרי יותר

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|}$$

למנוע התבדרות $\rightarrow j\neq i$

עבור התפלגות מטען רציפה

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\iint\frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x\,d^3x'$$

$$\underline{W = \frac{1}{2}\int\rho(\vec{x})\Phi(\vec{x})\,d^3x}$$

כיצד? תלויה האנרגיה הכוללת ב $E(\vec{x})$?

צריך לעבור מ $\Phi(\vec{x})$ ו $\rho(\vec{x})$ לביטוי הקשור ל $E(\vec{x})$

1. $\rho(\vec{x}) = -\epsilon_0\nabla^2\Phi(\vec{x}) \leftarrow W = -\frac{\epsilon_0}{2}\int_V \Phi\,\nabla^2\Phi\,d^3x$

2. נשתמש בזהות הוקטורית (ז/ט):

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi$$

ונציב בה $\varphi = \psi = \Phi$

$$\to \Phi\nabla^2\Phi = \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{\nabla}\Phi) - |\vec{\nabla}\Phi|^2$$

משתמש בזהות הוקטורית לביצוע אינטגרציה בחלקים (גירסה א $\int dv$ ל $\oint ds$)

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \Phi \nabla^2 \Phi \, dv = -\frac{\varepsilon_0}{2}\oint_S \Phi \vec{\nabla}\Phi \, da + \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\vec{\nabla}\Phi|^2 d^3x$$

מכיון שהאינטגרל הנ' על כל המרחב $S \to \infty$

$\Phi \propto \frac{1}{r}, \; \nabla\Phi \propto \frac{1}{r^2}$

$\int \Phi \nabla \Phi \, da \propto \frac{r^2}{r^3} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

נקבל

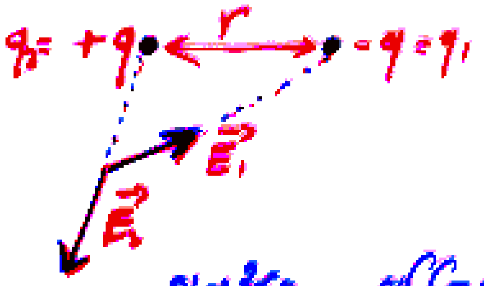
$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\vec{E}|^2 d^3x$$

$w = \frac{\varepsilon_0}{2}|E|^2$ - צפיפות האנרגיה בשדה האלקטרוסטטי

סתירה לביטוי הקודם?

מהביטוי האחרון $W \geq 0$ תמיד?

אבל אנרגית הפוטנציה של 2 מטענים $+q, -q$ $\quad W = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} < 0$



מה ההסבר?

הביטוי עם $\vec{E}$ כולל את האנרגיה האלקטרוסטטית העצמית

נחשב את האנרגיה האלקטרוסטטית של מערכת 2 מטענים

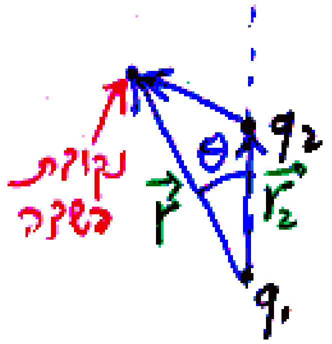
$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2)\, d^3x$$

$$W = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\int \frac{q_1^2}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^4} d^3x + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \frac{q_2^2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^4} d^3x + \varepsilon_0 q_1 q_2 \int \frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3 |\vec{x}-\vec{x}_2|^3} d^3x\right]$$

אנרגיה עצמית של מטען 1 — אנרגיה עצמית של מטען 2 — אנרגית האינטראקציה בין מטען 1 ו 2 $= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

לחישוב האבר הימני נשתמש בקואורדינטות ספריות

נשים ראשית הצירים היא של מטען q_1 ← $\vec{x}_1=0$



$$\vec{x}-\vec{x}_1=\vec{r} \quad (r,\theta,\varphi)$$

$$\vec{x}-\vec{x}_2=\vec{r}-\vec{r}_2 \qquad |\vec{r}-\vec{r}_2|^2=r^2+r_2^2-2rr_2\cos\theta$$

$$W_{12}=\frac{\epsilon_0 q_1 q_2}{(4\pi\epsilon_0)^2}\underbrace{\int_{0}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2-rr_2\cos\theta)\,r^2 dr\,d\theta\,d\varphi}{r^3(r^2+r_2^2-2rr_2\cos\theta)^{3/2}}}_{=\frac{4\pi}{r_2}}$$

$$W_{12}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \leftarrow$$

3 צפיפות האנרגיה והכוח האלקטרוסטטי

מהו הכוח הפועל בין גופים טעונים?

$$\vec{F}=-\frac{dW}{d\vec{x}}$$

נבצע הזזה "וירטואלית" של אחד הגופים ונחשב כיצד משתנה האנרגיה המאוחסנת בשדה מכך.

דוגמה

השדה על פני מוליך - $\vec{E}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

צפיפות האנרגיה האלקטרוסטטית - $w=\frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2=\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

הזזה "וירטואלית" של אלמנט שטח

הקטנת האנרגיה האלקטרוסטטית - $\Delta W=-\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\Delta x\,\Delta a$

כתוצאה מהזזת אלמנט שטח Δa מרחק Δx כלפי חוץ

הכוח ליחידת שטח (כלפי חוץ) של פני המוליך $\rightarrow f=\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}=\frac{\sigma}{2}E$ (כלפי חוץ)

קיבול והשראה

נתונה מערכת של n מוליכים, הנתונים כל אחד?
בפוטנציאל V_i עם מטען כולל Q_i, V_i תלוי לינארית ב $\{Q_i\}$

$$\rightarrow \quad V_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} Q_j$$

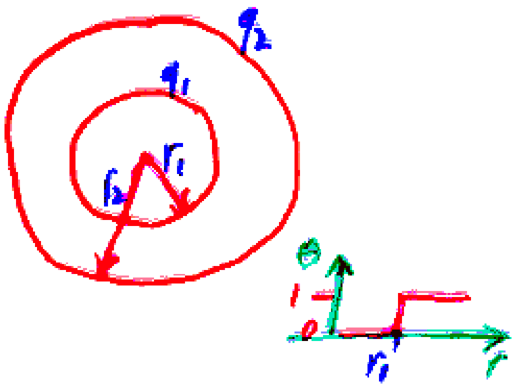
p_{ij} – מקדמים התלויים בגאומטריה
(צורת המוליכים, מיקומם)
ניתן להפוך את המטריצה p_{ij} ולרשום

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_j$$

C_{ii} – קיבול
$i \neq j$ C_{ij} – מקדם ההשראה

$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} V_i V_j$ – האנרגיה הכוללת

דוגמה



שני כדורים מוליכים קונצנטריים:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\theta(r-r_1) + \frac{q_2\,\theta(r-r_2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right]\hat{r}$$

פונ' מדרגה

$$V_2 = \int_{r_2}^{\infty} \vec{E}(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{r_2}^{\infty} \frac{(q_1+q_2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

$$V_1 = \int_{r_1}^{\infty} \vec{E}(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr + \int_{r_2}^{\infty}\frac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \int_{r_1}^{\infty}\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr + \int_{r_2}^{\infty}\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \underbrace{4\pi\epsilon_0 \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{r_2}{r_1} \end{pmatrix}}_{\{C_{ij}\}}$$

מקובל להגדיר קיבול של "קבל" (2 מוליכים עם מטען $+q, -q$)

$$C \equiv \frac{q}{\Delta V}, \quad q_1 = -q_2 = q, \quad \Delta V = V_1 - V_2 \quad \rightarrow \quad C = \frac{q\,4\pi\epsilon_0}{q\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) - q\cdot\frac{2}{r_2}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

פתרון בעיות תנאי שפה
באלקטרוסטטיקה בשיטת הדמויות

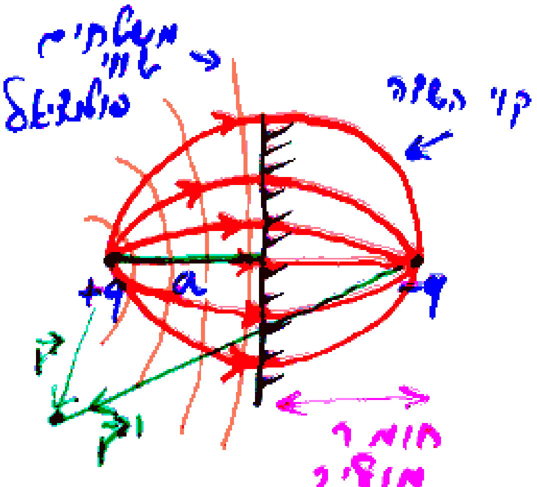
בשיטת הפתרון באמצעות פונקצית גרין מחפשים את $F(\vec{x},\vec{x}')$ המקיים $\nabla^2 F(\vec{x},\vec{x}')=0$

← F מייצג את הפוטנציאל של התפלגות מטען מחוץ לנפח V המוגדר ע"י המשטח הסוגר S, הגורם לקיום תנאי השפה $G_D(S)=0$ או $\frac{\partial G_N(S)}{\partial n}=0$

כאשר $G=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}+F(\vec{x},\vec{x}')$ – הפוטנציאל ב $\vec{x}'$ כתוצאה ממטען יחידה ב $\vec{x}$

\+ הפוטנציאל ב $\vec{x}'$ כתוצאה מהתפלגות המטען ש F מייצג

בעיות מסוימות ניתן לפתור באמצעות F המייצג מטען נקודתי = שיטת הדמויות



דוגמא פשוטה

נתון מטען $+q$ במרחק a ממשטח מוליך

מה הפוטנציאל במרחב?

מהי צפיפות המטען המושרה על המשטח?

ע"י הוספת מטען "דמות" $-q$

במרחק a מעברו השני של המשטח ← $\vec{E}(s)$ ניצב לפני המשטח

מכח הקיום והיחידות ← מצאנו את ה פתרון.

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r}|}-\frac{q}{|\vec{r}_q|}\right)\quad,\quad \sigma(s)=\varepsilon_0|\vec{E}(s)|$$

$$\vec{E}_s=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_s=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\right)\right]_{x=0}$$

נגדיר את המישור $x=0 \equiv S$

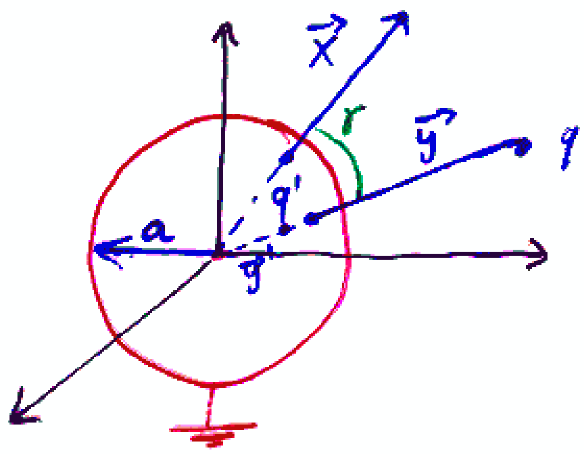
והמטענים במישור $z=0$

$$\rightarrow E_s=\frac{-2qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\qquad\rightarrow \sigma=-q\frac{a}{2\pi r^3}$$

$$\int_S \sigma\, ds=-q$$

ומתקיים ?

(19) מטען נקודתי סמוך לכדור מוליך מוארק

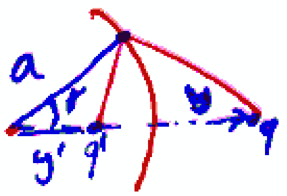


נתון
מטען q ב- $\vec{y}$, צריך למצוא!

מטען דמוי q' ב- $\vec{y}'$, כך שיתקיים

דאוד
בתנאי מוליך מוארק $\leftarrow$ $\Phi(|\vec{x}|=a)=0$

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|}+\frac{q'}{|\vec{x}-\vec{y}'|}\right]$$



נסמן $\vec{x}=x\vec{n}$, $\vec{y}=y\vec{n}'$, $\vec{y}'=y'\vec{n}'$

משיקול סימטריה $\vec{y}, \vec{y}'$ באותו כיוון $\vec{n}'$.

$$\rightarrow \Phi(x=a)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{a\left|\vec{n}-\frac{y}{a}\vec{n}'\right|}+\frac{q'}{y'\left|\frac{a}{y'}\vec{n}-\vec{n}'\right|}\right]=0$$

לא בקואורדינטות ספריות, כאשר $\vec{n}'$ בכיוון $\theta=0$! $\vec{n}$ בכיוון
$\theta=\gamma, \varphi=0$

$$\Phi(a)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2-2ay\cos\gamma}}+\frac{q'}{\sqrt{a^2+y'^2-2ay'\cos\gamma}}\right]=0$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{a\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2-2\frac{y}{a}\cos\gamma}}+\frac{q'}{y'\sqrt{1+\left(\frac{a}{y'}\right)^2+2\frac{a}{y'}\cos\gamma}}\right]=0$$

$$\leftarrow \quad \frac{q}{a}=-\frac{q'}{y'}, \quad \frac{y}{a}=\frac{a}{y'} \quad \Leftarrow \quad y'=\frac{a^2}{y}, \quad q'=-\frac{a}{y}q$$

והפוטנציאל בנקודה כלשהי $\vec{x}=\vec{r}=(r,\gamma,0)$

$$\Phi(r,\gamma)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+y^2-2ry\cos\gamma}}-\frac{a}{y\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{y}\right)^2-2r\frac{a^2}{y}\cos\gamma}}\right]$$

וצפיפות המטען המשטחי על פני הכדור

גזירה בניצב
למשטח

$$\sigma(\gamma)=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=a}=\frac{-q}{4\pi a^2}\left(\frac{a}{y}\right)\frac{1-\left(\frac{a}{y}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{a}{y}\right)^2+2\frac{a}{y}\cos\gamma\right]^{3/2}}$$