תורה אלקטרומגנטית

סמסטר אביב 2002

הערה: יתכנו שיבושים/טעויות בתוכן השקפים, תיקונים יעשה בזמן ההרצאה. תיקונים יתקבלו בתודה.

מבוא לאלקטרוסטטיקה

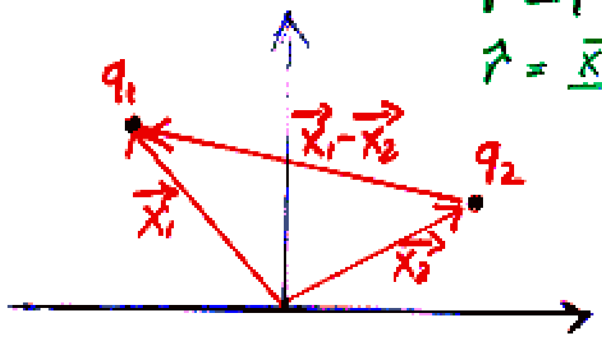
חוק קולון (Coulomb)

$$\vec{F} = k q_1 q_2 \frac{\vec{X}_1 - \vec{X}_2}{|\vec{X}_1 - \vec{X}_2|^3} = \frac{k q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

- הכוח על מטען נקודתי q_1 הנמצא ב $\vec{X}$ כתוצאה ממטען q_2 הנמצא ב $\vec{X}_2$

$r = |\vec{X}_1 - \vec{X}_2|$

$\hat{r} = \frac{\vec{X}_1 - \vec{X}_2}{r}$



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E}(\vec{X}) = k q_1 \frac{\vec{X} - \vec{X}_1}{|\vec{X} - \vec{X}_1|^3} \quad \left(= \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta q} = \frac{d\vec{F}}{dq} \right)$$

- השדה החשמלי בנקודה $\vec{X}$ כתוצאה ממטען q_1 הנמצא ב $\vec{X}_1$

יחידות

Gaussian - cgs

$k = 1$

q - electrostatic units (esu) statcoulomb

$q = 1\,\text{esu},\ r = 1\,\text{cm} \rightarrow F = 1\,\text{dyn},\ E = 1\,\frac{\text{statvolt}}{\text{cm}}$

Rationalized - mksA - SI

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2 \approx 9\cdot 10^9$

ϵ_0 - ה[illegible] של הריק (permittivity)

q - coulomb (c) = 1 Ampere · 1 sec

$q = 1c\ (= 3\cdot 10^9\,\text{esu}),\ r = 1\,\text{m}$

$\rightarrow F \approx 9\cdot 10^9\,\text{N},\ E \approx 9\cdot 10^9\,\text{volt/m}$

עקרון הסופרפוזיציה

$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3}$ – השדה החשמלי ב $\vec{x}$
הנוצר מסט של מטענים
q_i הנמצאים ב $\vec{x}_i$

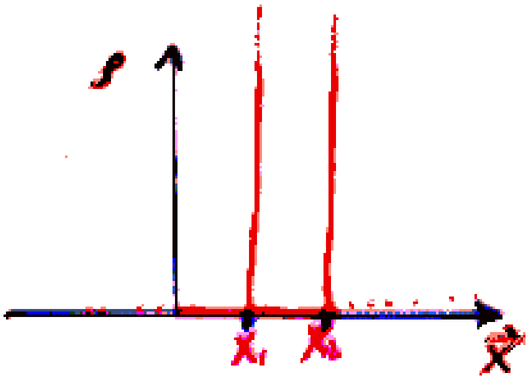
בגבול של התפלגות מטען רציפה

$\rho(\vec{x}) \equiv \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V}$ – צפיפות המטען ב $\vec{x}$

נקבל

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{x}\,')\frac{\vec{x}-\vec{x}\,'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|^3}d^3x'$$

האם ניתן להשתמש ב $\rho(\vec{x})$ לתאר מספר סופי של
מטענים נקודתיים ?



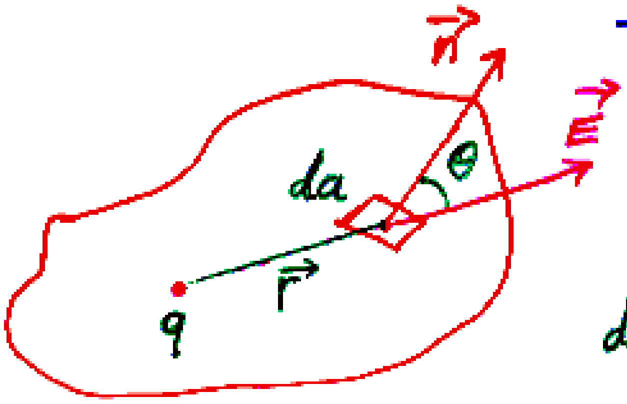
$\rho(\vec{x}_i)\to\infty$

אבל $\int_{\vec{x}_i-\epsilon}^{\vec{x}_i+\epsilon}\rho(\vec{x})\,dx = q_i$

← בדיוק התכונות של $\delta(x)$ – פונקציית δ של דיראק

$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} q_i\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$ – צפיפות המטען בנוצר
מסט של מטענים q_i ב $\vec{x}_i$

חוק גאוס



da – אלמנט שטח על פני
משטח סגור

$\vec n$ – וקטור יחידה הניצב ל da

$\vec r$ – מרחק המטען q מ da

$$\vec E\cdot\vec n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\cos\theta$$

הזווית המרחבית – $d\Omega = \frac{da}{r^2}\cdot\cos\theta$

שתופסת da מה"שטח"
בנקודה בה נמצא q

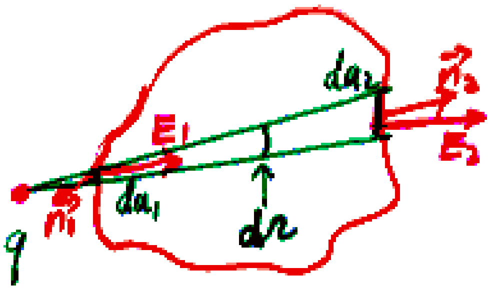
שקול למספר קווי השדה

שטף השדה החשמלי דרך da $\longrightarrow$ $\vec E\cdot\vec n\,da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega$

$$\longrightarrow \int_S \vec E\cdot\vec n\,da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$S \to$ המשטח בו מוכל q

שכן לכל זוית מרחבית
הכולה 4π.



אם q מחוץ למשטח S

$$\vec E_1\cdot\vec n_1\,da_1 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega$$

$$\vec E_2\cdot\vec n_2\,da_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}d\Omega$$

$$\longrightarrow \int_S \vec E\cdot\vec n\,da = 0$$

ע"פ עקרון הסופרפוזיציה, עבור התפלגות מטען בתוך S נקבל

$$\int_S \vec E\cdot\vec n\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i q_i \quad , \quad \int_S \vec E\cdot\vec n\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec x)\,d^3x$$

חוק גאוס בניסוח הדיפרנציאלי

משתמשים במשפט הדיברגנץ

$$\int_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,da = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d^3x$$

$\vec{A}(\vec{x})$ - שדה וקטורי כלשהו ("well-behaved")

משטח סגור (S)   הנפח הסגור בתוך S (V)

נזכר חוק גאוס, ונקבל:

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,da = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,d^3x$$ — משפט הדיברגנץ

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\vec{x})\,d^3x$$ — חוק גאוס

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$$

קשר מקומי בין השתנות השדה לצפיפות המטען.
(אבל $\vec{E}$ עדיין לא מוגדר חד ערכית)

הפוטנציאל החשמלי

ניתן לקבל את $\vec{E}(\vec{x})$ מפוטנציאל סקלרי $\Phi(\vec{x})$
(נוח יותר לחישובים)

$$\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\left[=\hat{x}\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}+\hat{y}\frac{d}{dy}\frac{1}{\sqrt{\cdots}}\cdots\right]$$

גרדיאנט בנקודה $\vec{x}$ תזכורת, בקואורדינטות קרטזיות

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{x}')\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,d^3x' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\rho(\vec{x}')\,d^3x'$$

אבל, האינטגרל בנוי על $\vec{x}'$ (מיקום המטענים)
ובנגזרת $\vec{\nabla}$ היא על $\vec{x}$ (המיקום בו מחושב השדה)

$$\leftarrow \quad \int \vec{\nabla} = \vec{\nabla}\int$$

$$\rightarrow \quad \vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' \equiv -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$$

הפוטנציאל החשמלי (גודל סקלרי) – $\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x' + C$

Φ מוגדר עד כדי קבוע

מכיון שעבור כל פונקציה סקלרית ψ
מתקיים הקשר $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi = 0$

ומתקיים גם הקשר שמצאנו $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$

אז: $\underline{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$

משוואה זאת + חוק גאוס ← הגדרה חד ערכית של $\vec{E}(\vec{x})$

אנרגיה פוטנציאלית חשמלית

$$W = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$ – העבודה הדרושה להתגבר על הכוח האלקטרוסטטי ולהעביר מטען מ A ל B

$$\rightarrow \quad W = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$= q\int_A^B \vec{\nabla}\Phi\, d\vec{\ell} = q\int_A^B d\Phi = q[\Phi(B)-\Phi(A)]$$

ערך האינטגרל תלוי מ A ו B

האנרגיה הפוטנציאלית - $q\Phi$
של מטען q בשדה אלקטרוסטטי

$$\rightarrow \int_A^A \vec{E}\cdot d\vec{l} \equiv \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

ניתן לקבל זאת ישירות ממשפט סטוקס עבור שדה $\vec{A}(\vec{x})$

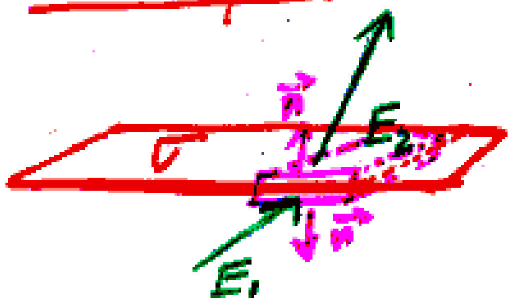
$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}\,da$$

המשטח המוגבל במסלול הסגור

והעובדה ש $\nabla\times\vec{E} = 0$

מטען ודיפול משטחי, ורציפות $\vec{E}$ ו Φ

מטען משטחי

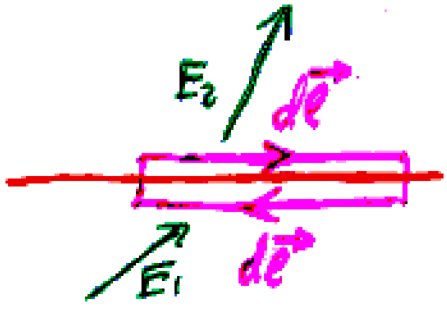


הרכיב הניצב של $\vec{E}$

σ - המטען ליחידת שטח של פני המשטח

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$ ← משפט גאוס (עבור קופסא עם גובה → 0)

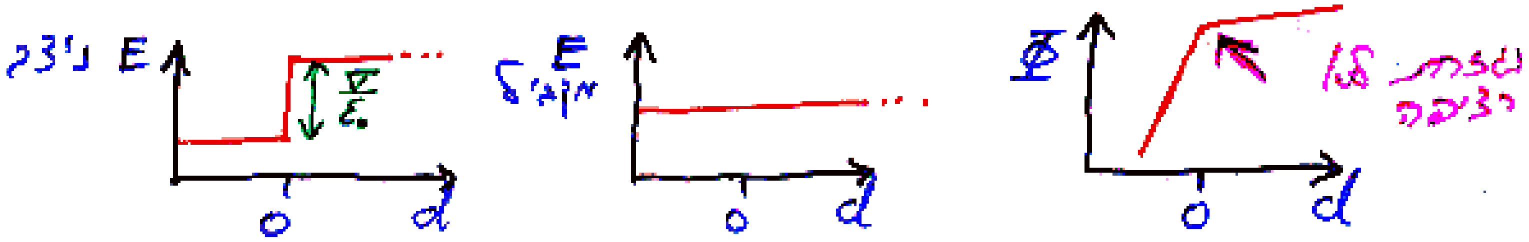
הרכיב המקביל של $\vec{E}$



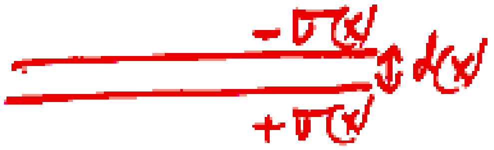
מתוך משפט סטוקס (עבור מסלול ברוחב → 0)

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

$$\longrightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot d\vec{l} = 0$$



דיפול משטחי



$$D(\vec{x}) \equiv \lim_{d(\vec{x})\to 0} \sigma(\vec{x})\, d(\vec{x})$$

בכיוון מומנט הדיפול המשטחי

$\vec{E}_2=\vec{E}_1$ ← עקרון הסופרפוזיציה $\qquad (\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot\vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}-\frac{\sigma}{\epsilon_0}=$

כיצד מתנהג הפוטנציאל?

פני המשטח התחתון $\qquad$ פני המשטח העליון

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,da - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\vec{x}'+\vec{n}d)}{|\vec{x}-\vec{x}'+\vec{n}d|}\,da'$$

נתמקד בקירוב ש $\frac{d}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\ll 1$

ובפיתוח ע"י טור טיילור

$$\frac{1}{|\vec{x}+\vec{a}|} = \frac{1}{x} + \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{x}\right)+\dots$$

הגזירה ב $\vec{x}'$

ונקבל

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \sigma(\vec{x}')\,\vec{n}\,d\,\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)da$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int_S D(\vec{x}')\,\vec{n}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)da$$

נזכר ש

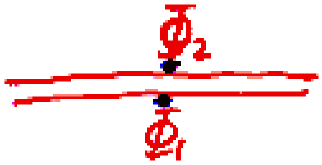
$$\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)=\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \to \vec{n}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)da = \frac{\overset{\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{\cos\theta}\, da}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2} = d\Omega$$

ונקבל:

$$\boxed{\Phi(\vec{x}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int_S D(\vec{x}')\,d\Omega}$$

← עבור D קבוע Φ תלוי $\Omega=\int d\Omega$ ללא קשר לצורת המשטח

← $\Phi \propto \frac{1}{r^2}$, $r=|\vec{x}-\vec{x}'|$.



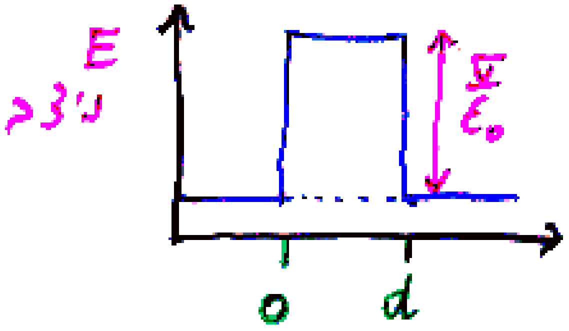
קרוב מאוד לפני המשטח $\int d\Omega = 2\pi$ – מעל המשטח

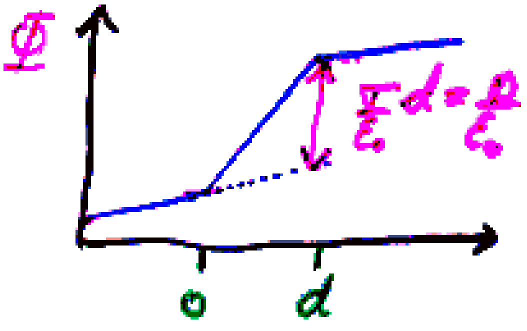
$-\int d\Omega = -2\pi$ – מתחת המשטח

בגלל היפוך הסימן של $\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')$

א' הרציפות בפוטנציאל $\to$ $\Phi_2-\Phi_1=\frac{D}{2\epsilon_0}- -\frac{D}{2\epsilon_0}=\underline{\frac{D}{\epsilon_0}}$
סימון לדיפול משטחי.

עבור דיפול עם מרווח סופי - d





בגבול $d\to 0$ הנחנו ש $\sigma\to\infty$ כך ש $D=\sigma\cdot d$ - קבוע
$\leftarrow$ קפיצה סופית בפוטנציאל משני עברי המשטח.

משוואות פואסון ולפלס

מצאנו ש: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi$ $(\vec{\nabla}\times\vec{E}=0\to)$

שימוש בזהות הוקטורית $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi=\nabla^2\psi$

ונקבל $\underline{\nabla^2\Phi=-\rho/\epsilon_0}$ - משוואת פואסון

בריק נקבל $\nabla^2\Phi=0$ - משוואת לפלס

לדוגמא: נבדוק ש $\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$

מקיים את משוואת פואסון

$$\nabla^2\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla^2\int\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{x}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'$$

מכיוון ש ∇^2 פועל לפי $\vec{x}$ ולא $\vec{x}'$.

נשתמש בקשר (הוכיח)
$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

ונקבל
$$\nabla^2\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{x}')\left(-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')\right)d^3x'$$

$$\to \quad \nabla^2\Phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

(לא הוכחה בלי שימוש בפונ' δ ב Jackson סעיף 1.7)
בהינתן $\Phi(\vec{x})$, נקבל את $\rho(\vec{x})$ (או ההפך, מבוטא ה $\int$)

משפט גרין

שימושי בגלל קיום תנאים מוגדרים בגבול
← משטחים מגדי פוטנציאל בגבול ≡ "תנאי שפה"

משפט גרין: מחבר אינטגרל נפחי לשטחי $\quad \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x})}{r}dv$

כל הנפח

הזהות הראשונה של גרין

משפט הדיברגנץ $\quad \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,da$

+ הזהות הוקטורית $\quad \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi$

נקבל:
$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi)\,dv = \oint_S \varphi\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{n}\,da = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,da$$

הנגזרת הניצבת למשטח

הזהות השניה של גרין (משפט גרין)

נחליף את φ ו ψ בזהות הראשונה ונחסר מהביטוי הקודם, ונקבל
$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\,dv = \oint_S\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)da$$

מה הקשר לאלקטרוסטטיקה ?

נבחר: $\psi \equiv \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$, $\varphi = \Phi$

מתקיים: $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\nabla^2\psi = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ $\leftarrow$

נציב במשפט גרין

$$\int_V\left[\Phi(\vec{x}')4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')+\frac{1}{\epsilon_0 R}\rho(\vec{x}')\right]d^3x'=\oint_S\left[\Phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right]da'$$

כאשר: $R=|\vec{x}-\vec{x}'|$

אם $\vec{x}$ נמצא בתוך V $\left(\int\delta\,dv=1\right)$ נקבל

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{x}')}{R}d^3x'+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n'}-\Phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]da'$$

משוואה אינטגרו-דיפרנציאלית ל- Φ (למה זה טוב?)

אינטגרל על נפח סופי (במקום כל המרחב) + משטח סופי.

בדיקת תקינות: בגבול $R\to\infty$

והתפלגות מטען סופית נקבל ש:

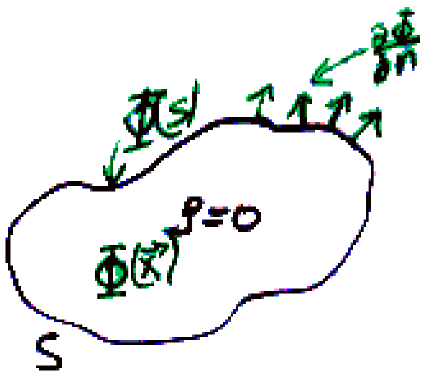
$$\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\propto\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$$\to\oint_S\propto\frac{R^2}{R^3}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

ונחזור לביטוי הידוע:

$$\Phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}')}{R}d^3x'$$

בעיה מעניינת נוספת



אם בנפח מסוים $\rho(\vec{x}')=0$

(← האבר הראשון מימין $=0$)

אזי הפוטנציאל בכל נקודה בנפח

נקבע לפי Φ ! $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ על פני המשטח.

(למעשה רק אחד משניהם מספיק)