הפתק הסגול

www.technion.co.il

משוואות דיפרנציאליות רגילות ח'

104131

סיכום הקורס

תוכן עניינים

תוכן עניינים........ 2
משוואות ליניאריות מסדר ראשון........ 3
משוואות לא ליניאריות מסדר ראשון........ 3
משוואות ברנולי........ 3
משוואות פרידות........ 3
משוואות מדויקות........ 4
משוואות הומוגניות........ 4
מציאת משפחת עקומות שנחתכות עם משפחת עקומות נתונה........ 4
משוואות ליניאריות מסדר n>1........ 5
משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר n........ 5
משוואות ליניאריות לא הומוגניות מסדר n........ 6
משוואות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים........ 6
משוואות ליניאריות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים........ 6
משוואת אוילר הומוגנית........ 7
משוואת אוילר לא הומוגנית........ 7
מערכות משוואות דיפרנציאליות........ 7
מערכת משוואות מסדר ראשון........ 7
מערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון........ 8
מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר ראשון........ 8
מערכות משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר ראשון עם מקדמים קבועים........ 9
מערכות משוואות ליניאריות לא הומוגניות מסדר ראשון עם מקדמים קבועים........ 9
פתרון משוואות דיפרנציאליות ע"י טורים........ 10

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

צורה כללית של משוואה דיפרנציאלית ליניארית רגילה מסדר ראשון:

$$y'+p(x)y=q(x)$$

פתרון: נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$, פונקציה כזו שנכפיל את המשוואה בה כך שנוכל לכתוב את המשוואה כך:

$$\left(\mu(x)\cdot y\right)'=q(x)\cdot\mu(x)$$

גורם האינטגרציה כזה יהיה $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$.

אין צורך להוסיף קבוע לאינטגרציה, משום שדי לנו בפונקציה אחת $\mu(x)$ שעוזרת לנו לפתור את המשוואה.

ניתן למצוא נוסחה כללית לפתרון משוואות כאלו:

$$y=\frac{\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+c}{e^{\int p(x)dx}}$$

כאשר c קבוע שרירותי.

<u>משפט הקיום והיחידות למשוואות ליניאריות מסדר ראשון:</u>

תהי המשוואה

$$y'+p(x)y=q(x)$$

ויהי תנאי התחלה $y(x_0)=y_0$.

אם $p(x)$ ו $q(x)$ רציפות ב (α,β) המכיל את x_0, אזי קיימת פונקציה אחת ויחידה הפותרת את המשוואה בכל (α,β) ומקיימת את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$.

משוואות לא ליניאריות מסדר ראשון

צורה כללית:

$$y'=f(x,y)$$

<u>משפט הקיום והיחידות למשוואות לא ליניאריות מסדר ראשון:</u>

תהי $y'=f(x,y)$, ויהי תנאי התחלה $y(x_0)=y_0$.

אם $f(x,y)$ ו $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ רציפות במלבן $\alpha<x<\beta$, $\gamma<y<\delta$ המכיל את הנקודה (x_0,y_0),

אזי קיים פתרון אחד ויחיד למשוואה, המקיים את תנאי ההתחלה, ומוגדר בסביבה מסוימת של x_0.

משוואות ברנולי

צורה כללית:

$$y'+p(x)y=q(x)y^n$$

כאשר $n\neq 0,1$, $n\in\mathbb{R}$.

פתרון: עבור $y\neq 0$, נסמן $v=y^{1-n}$ ונחלק את המשוואה ב y^n. נקבל $\frac{y'}{y^n}+p(x)y^{1-n}=q(x)$.

מכיוון ש $v=y^{1-n}$, הרי ש $v'=(1-n)y^{-n}\cdot y'$, ולכן המשוואה שקיבלנו היא ליניארית: $\frac{v'}{1-n}+p(x)v=q(x)$.

בנוסף, כאשר $n>0$, ישנו הפתרון הסינגולארי $y\equiv 0$ למשוואה זו.

משוואות פרידות

צורה כללית:

$$f(y)\cdot y'=g(x)$$

פתרון: נכתוב בצורה: $f(y)dy=g(x)dx$ ונבצע אינטגרציה על שני האגפים.

משוואות מדויקות

צורה כללית:

$$M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$$

או

$$M\left(x,y\right)+N\left(x,y\right)y'=0$$

או

$$M\left(x,y\right)x'+N\left(x,y\right)=0$$

<u>משפט</u>: המשוואה

$$M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$$

מדויקת בתחום הרציפות של M_y,N_x, M, N אם"ם $M_y=N_x$.

נסמן $M=\frac{\partial\psi}{\partial x}$ ו $N=\frac{\partial\psi}{\partial y}$, כש $\psi=\psi\left(x,y\right)$. אם המשוואה מדויקת, כלומר $M_y=N_x$, אז ע"פ המשוואה המדויקת ובהיעזרנו בכלל השרשרת,

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(x,y\left(x\right)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(x,y\left(x\right)\right)=0$$

לכן הפתרון הוא: $\psi\left(x,y\right)=c$.

בד"כ ניתקל במשוואה שדומה לזו, אך היא לא תהיה מדויקת, כלומר $M_y\neq N_x$. נצטרך לכפול את המשוואה בגורם אינטגרציה $\mu=\mu\left(x\right)$ או $\mu=\mu\left(y\right)$ כדי לדייק את המשוואה. לאחר ההכפלה, נגזור בצורה כללית ונדרוש $M_y=N_x$.

נבחר את μ להיות זה שכאשר מציבים $\mu=\mu\left(x\right)$ או $\mu=\mu\left(y\right)$ מקבלים μ שתואם לדרישה (כלומר תלוי רק ב x או רק ב y בהתאמה).

לעיתים נדע מראש ש $\mu=\mu\left(x,y\right)$, אבל רק באופן כללי, לדוגמה $\mu=f\left(xy^2\right)$. במקרה כזה:

נגדיר $\mu=\mu\left(z\right)$, כאשר $z\equiv xy^2$, נגזור בצורה כללית ונדרוש $M_y=N_x$.

שימו לב לא לשכוח נגזרת פנימית: $\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu'\frac{\partial z}{\partial x}$, ו $\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu'\frac{\partial z}{\partial y}$.

משוואות הומוגניות

צורה כללית: $y'=f\left(x,y\right)$, כאשר ניתן לרשום: $y'=f(x,y)=F\left(\frac{y}{x}\right)$.

פתרון: נסמן $v=\frac{y}{x}$, ואז $y=vx$, $y'=v'x+v$. ולכן המשוואה היא $v'x+v=F\left(v\right)$, או $\frac{dx}{x}=\frac{dv}{F(v)-v}$ כלומר משוואה פרידה.

מציאת משפחת עקומות שנחתכות עם משפחת עקומות נתונה

נתונה משפחת עקומות $y=f\left(x\right)$, או בצורה סתומה $f\left(x,y\right)=0$.

ע"י גזירה והצבה, נמצא את המשוואה המתארת את השיפועים של משפחת הפונקציות: $y'=f\left(x,y\right)$.

נעזר בזהות הטריגונומטרית $\tan\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ לחישוב הקשר בין השיפועים של שתי המשפחות, כאשר $\alpha-\beta$ היא זווית החיתוך בין העקומות ו $\tan\alpha$, $\tan\beta$ הם השיפועים.

כאשר נדרש חיתוך בזווית ישרה, הדרישה היא $y'\cdot v'=-1$ כאשר v' השיפוע של המשפחה המבוקשת.

משוואות ליניאריות מסדר n>1

צורה כללית: $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$

<u>משפט הקיום והיחידות עבור משוואות ליניאריות מסדר n</u>:

תהי $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$ משוואה ליניארית מסדר n, ותהי נקודה x_0 בה נתון

תנאי התחלה $\begin{cases} y(x_0)=c_0 \\ y'(x_0)=c_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=c_{n-1} \end{cases}$.

אם הנקודה x_0 נמצאת בתחום הרציפות של הפונקציות $f(x),\ p_1(x),\ p_2(x),\ldots,p_n(x)$ אזי קיים למשוואה פתרון אחד ויחיד המקיים את תנאי ההתחלה. פתרון זה מוגדר לפחות בכל תחום הרציפות של המשוואה ($\equiv$תחום הרציפות של כל הפונקציות $f(x),\ p_1(x),\ p_2(x)\ ,\ldots,\ p_n(x)$).

<u>משפט</u>: במשוואה ליניארית, הפרש שני פתרונות פרטיים הם פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה.

<u>משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר n</u>

צורה כללית:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 .$$

למשוואה ליניארית הומוגנית תמיד קיים הפתרון הטריביאלי $y\equiv 0$.

קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית הומוגנית מסדר n היא מרחב וקטורי ממימד n.

מטריצת וורונסקי עבור משוואה ליניארית הומוגנית מסדר n, שפתרונותיה $y_1,y_2,\ldots y_n$:

$$\psi(x)=\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & \cdots & y_n \\ y_1' & & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

אם פתרונות אלו תלויים ליניארית, אזי הוורונסקיאן שלהם $W(x)=|\psi(x)|=\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & \cdots & y_n \\ y_1' & & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$ יתאפס בכל נקודה בתחום ההגדרה של המשוואה.

אם פתרונות אלו בלתי תלויים, אזי הוורונסקיאן שלהם לא יתאפס בשום נקודה בתחום ההגדרה של המשוואה.

ולכן, כדי לבדוק אי-תלות של פתרונות – נרשום את הוורונסקיאן ונבדוק, באיזה נקודה שנוחה לנו, אם הוא מתאפס.

יש לשים לב שפיתוח הוורונסקיאן מתאים למשוואה מנורמלת – מקדם $y^{(n)}$ הוא 1.

נוסחת אָבֶל לוורונסקיאן: $W=c\cdot e^{-\int p_1(x)dx}$, עדיין עבור המשוואה המנורמלת $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0$.

הורדת סדר של משוואה ליניארית הומוגנית

צורה כללית: $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$.

בהינתן פתרון $y_1(x)$, נסמן את הפתרון הנוסף $y(x)=v(x)\cdot y_1(x)$. נגזור פתרון זה ונציב במשוואה המקורית.
הביטויים הכוללים את y יצטמצמו ונשאר רק עם נגזרות של y .
נסמן $z\equiv y'$, נפתור את המשוואה עבור z ונחלץ את y .

משוואות ליניאריות לא הומוגניות מסדר n

נקודות כלליות:

1. הפרש שני פתרונות פרטיים של משוואה ליניארית הוא פתרון פרטי למשוואה ההומוגנית המתאימה.
2. פתרון כללי y למשוואה ליניארית $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=g(x)$ הוא פתרון כללי y_h של המשוואה ההומוגנית המתאימה $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$ בתוספת פתרון y_p פרטי, כלומר: $y=y_h+y_p$.

משוואות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים

צורה כללית: $y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+c_1y'+c_0y=0$.

נרכיב את הפולינום האופייני, כך ש $y^{(k)}$ מתורגם ל r^k : $r^n+c_{n-1}r^{n-1}+\ldots+c_1r+c_0=0$

נמצא את שורשי הפולינום האופייני, ונתרגם את פתרונותיו לפתרונות המשוואה ההומוגנית כך:

מקרה I – שורש r מריבוי 1 יתורגם לפתרון: e^{rx}

מקרה II – שורש r מריבוי m יתורגם לפתרונות: $e^{rx},xe^{rx},x^2e^{rx},\ldots,x^{m-1}e^{rx}$

מקרה III – שורש מרוכב והצמוד שלו $r=a\pm ib$ יתורגמו לזוג הפתרונות: $e^{ax}\cos(bx),e^{ax}\sin(bx)$

הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית יהיה קומבינציה ליניארית של כל הפתרונות שתרגמנו.

משוואות ליניאריות לא הומוגניות עם מקדמים קבועים

צורה כללית: $y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+c_1y'+c_0y=g(x)$

ראשית, נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה $y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+c_1y'+c_0y=0$, ע"פ הכללים שלעיל.
שנית, נחפש פתרון פרטי למשוואה האי-הומוגנית ע"פ הכללים:

עבוד צורה כללית כזו של $g(x)$	נחפש פתרון פרטי למשוואה האי-הומוגנית, מהצורה הזו
$p_k(x)$ - פולינום ממעלה k .	$y_p(x)=x^sQ_k(x)$, כאשר $Q_k(x)$ פולינום ממעלה k , ו s הוא הריבוי של השורש 0 בפולינום האופייני של המשוואה ההומוגנית המתאימה.
הכללה: $p_k(x)\cdot e^{\alpha x}$ - פולינום ממעלה k מוכפל באקספוננט $e^{\alpha x}$.	$y_p(x)=x^sQ_k(x)e^{\alpha x}$ כאשר $Q_k(x)$ פולינום ממעלה k , ו s הוא הריבוי של השורש α בפולינום האופייני של המשוואה ההומוגנית המתאימה.
הכללה נוספת: $p_k(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$, או $p_k(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x$ - פולינום ממעלה k מוכפל באקספוננט $e^{\alpha x}$, מוכפל ב sin או cos	$y_p(x)=x^sQ_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ כאשר $Q_k(x)$ פולינום ממעלה k , ו s הוא הריבוי של השורש המרוכב $\alpha+i\beta$ בפולינום האופייני של המשוואה ההומוגנית המתאימה.

את המקדמים הקבועים של הפולינומים נחשב ע"י הצבת הפתרון הפרטי במשוואה המקורית.

לבסוף נזכור שפתרון כללי למשוואה האי-הומוגנית הוא סכום של הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה $y_H(x)$ ופתרון פרטי של המשוואה האי-הומוגנית $y_p(x)$, כלומר פתרון כללי $y(x)$ נראה כך:
$y(x)=y_H(x)+y_p(x)$.

משוואת אוילר הומוגנית

צורה כללית: $x^n y^{(n)} + c_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1 xy' + c_0 y = 0$, כלומר המקדם של $y^{(k)}$ הוא קבוע כפול x^k.

נרכיב את הפולינום האופייני, כך ש $y^{(k)}$ מתורגם ל $r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)$.

נמצא את שורשי הפולינום האופייני, ונתרגם את פתרונותיו לפתרונות המשוואה ההומוגנית כך:

מקרה I – שורש r מריבוי 1 יתורגם לפתרון: x^r

מקרה II – שורש r מריבוי m יתורגם לפתרונות: $x^r, x^r \ln x, \ldots, x^r (\ln x)^{m-1}$

מקרה III – שורש מרוכב והצמוד שלו $r = a \pm ib$ יתורגם לזוג הפתרונות: $x^a \cos(b \ln x), x^a \sin(b \ln x)$

כמו במקרה ההומוגני עם מקדמים קבועים, הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית יהיה קומבינציה ליניארית של כל הפתרונות שתרגמנו.

משוואת אוילר לא הומוגנית

צורה כללית: $x^n y^{(n)} + c_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1 xy' + c_0 y = g(x)$,

בדומה למשוואה ליניארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים, ראשית נפתור את משוואת אוילר ההומוגנית המתאימה $x^n y^{(n)} + c_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_1 xy' + c_0 y = 0$, ע"פ הכללים שלעיל.

כעת יש למצוא פתרון פרטי למשוואת אוילר האי-הומוגנית.

נבצע את הטרנספורמציה הבאה: $x = e^t$, וכך נקבל $\tilde{g}(t) = g(e^t)$.

נחפש פתרון פרטי $\tilde{y}_p(t)$ למשוואת אוילר האי-הומוגנית ע"פ אותם הכללים של משוואה עם מקדמים קבועים (הטבלה).

נבצע את הטרנספורמציה ההפוכה $t = \ln x$ על הפתרון הפרטי שמצאנו, וכך נקבל את $y_p(x)$.

את המקדמים הקבועים של הפולינומים נחשב ע"י הצבת הפתרון הפרטי במשוואה המקורית.

נשאר לכתוב את הפתרון כללי: $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$.

מערכות משוואות דיפרנציאליות

מערכת משוואות מסדר ראשון

צורה כללית:
$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{cases}$$

תנאי התחלה יראה כך:
$$\begin{cases} x_1(t_0) = c_1 \\ x_2(t_0) = c_2 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = c_n \end{cases}$$

משפט הקיום והיחידות למערכות משוואות

אם הפונקציות $\{f_i\}_{i=1}^n$ וכן נגזרותיהן החלקיות לפי $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\left\{ \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\}_{i=1}^n \right\}_{j=1}^n$ רציפות בסביבה של הנקודה $(c_1, c_2, \ldots, c_n, t_0)$, אזי למערכת ישנו פתרון אחד ויחיד המקיים את תנאי ההתחלה, והפתרון $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$ מוגדר בסביבה מסוימת של t_0.

מערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון

צורה כללית: $x_i' = \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(t)x_k\right) + g_i(t)$, כאשר $1 \le i \le n$.

משפט הקיום והיחידות למערכות משוואות ליניאריות

למערכת $x_i' = \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(t)x_k\right) + g_i(t)$, $1 \le i \le n$, קיים פתרון אחד ויחיד המקיים את תנאי ההתחלה $\begin{cases} x_1(t_0) = c_1 \\ x_2(t_0) = c_2 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = c_n \end{cases}$, אם t_0 בתחום הרציפות של הפונקציות $g_i(t), f_{ik}(t)$, לכל i,k. הפתרון מוגדר בכל תחום הרציפות הנ"ל.

נסתכל על המערכת בכתיב מטריצי: $X'(t) = P(t)\cdot X(t) + G(t)$, כאשר:

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & & \\ \vdots & & \\ p_{n1}(t) & & p_{nn}(t) \end{pmatrix},\ X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix},\ G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

ותנאי ההתחלה: $X(t_0) = \vec{K}$, כאשר $\vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$.

מערכת זו תקרא הומוגנית אם $G(t) \equiv \vec{0}$.

גם במערכות ניתן להראות שפתרון כללי של המערכת האי-הומוגנית הוא סכום של הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה ופתרון פרטי של המערכת האי-הומוגנית.

מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר ראשון

צורה כללית: $X'(t) = P(t)\cdot X(t)$.

טענה: קבוצת הפתרונות של מערכת של n משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר ראשון מהווה מרחב וקטורי ממימד n.

וורונסקיאן הפתרונות של מערכת משוואות ליניאריות: $W(t) = |\Psi(t)| = \begin{vmatrix} X^1 & X^2 & \cdots & X^n \end{vmatrix}$

וורונסקיאן הפתרונות יכול:

1. להתאפס בכל הנקודות בתחום הרציפות, כאשר הפתרונות תלויים
2. לא להתאפס באף נקודה בתחום הרציפות, כאשר הפתרונות בלתי תלויים

נוסחת אבל לוורונסקיאן של מערכת משוואות: $W(t) = |\Psi(t)| = C\cdot e^{\int (p_{11}(t)+p_{22}(t)+\ldots+p_{nn}(t))dt} = C\cdot e^{\int tr(P)dt}$

כאשר $tr(P)$ היא עקבת מטריצת המקדמים P.

מערכות משוואות ליניאריות הומוגניות מסדר ראשון עם מקדמים קבועים

צורה כללית למשוואה כזו: $X'(t)=PX(t)$, P מטריצה קבועה.

שלבי פתרון:

נמצא את הערכים העצמיים של P ע"י פתרון הפולינום האופייני: $|P-\lambda I|=0$

נמצא את הוקטורים העצמיים השייכים לע"ע.

1. עבור ע"ע λ ממשי שעבורו קיבלנו שריבוי אלגברי = ריבוי גיאומטרי (כלומר יש לו מספיק ו"ע), נקבל פתרון $e^{\lambda t}\vec{v}_\lambda$ כאשר $\vec{v}_\lambda$ הו"ע המתאימים.
2. עבור ע"ע מרוכב (וצמודו) $\lambda=a\pm ib$ נקבל ו"ע מרוכב. נקבל מע"ע זה את שני הפתרונות $\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}\vec{v}_\lambda\right)$ ו $\mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\vec{v}_\lambda\right)$. חשוב קודם לפתח את הביטוי לפתרון ורק בסוף לקחת את החלק הממשי והמדומה של הווקטור המרוכב שהתקבל!
3. עבור ע"ע λ מריבוי אלגברי m וריבוי גיאומטרי $m>$, נקבל פתרון מהצורה $\vec{u}e^{\lambda t}$, כאשר $\vec{u}$ וקטור שכל רכיביו פולינומים ממעלה $m-1$. נציב פתרון מוצע זה במשוואה ההומוגנית, וע"י השוואות מקדמים נקבל את וקטורי הפתרונות שנתרמים מע"ע זה.

הפתרון הכללי שלנו יהיה קומבינציה ליניארית של כל הפתרונות שקיבלנו מכל הערכים העצמיים,

כלומר: $X=\sum_{i=1}^{n}c_i\vec{v}_ie^{\lambda t}$

מערכות משוואות ליניאריות לא הומוגניות מסדר ראשון עם מקדמים קבועים

צורה כללית למשוואה כזו: $X'(t)=PX(t)+G(t)$, P מטריצה קבועה.

כמובן, הפזמון החוזר הוא שפתרון כללי של מערכת משוואות אי-הומוגנית הוא הסכום של הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה ופתרון פרטי של המערכת האי-הומוגנית.

לאחר שנפתור את המערכת ההומוגנית המתאימה, יישאר לנו למצוא פתרון פרטי של המערכת האי-הומוגנית. נרצה לחפש פתרון כזה (שיטת וריאציית המקדמים הישנה והטובה):

$$X_p(t)=u_1(t)X^1(t)+u_2(t)X^2(t)+\ldots+u_n(t)X^n(t)=\sum_{i=1}^{n}u_i(t)X^i(t)$$

(לא לשכוח שכל פתרון הוא בעצם וקטור של n פונקציות שפותרות את n המשוואות המקוריות שמיוצגות ע"י הכתיב המטריצי $X'(t)=PX(t)+G(t)$, כלומר $X^i(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}$)

ע"י הצבת פתרון מוצע זה במשוואות המקוריות, מקבלים די מהר שצריך להתקיים:

$\sum_{i=1}^{n}u_i'(t)X^i(t)=G(t)$, ואם אנו זוכרים את מטריצת וורונסקי: $\Psi(t)=\begin{pmatrix}X^1 & X^2 & \cdots & X^n\end{pmatrix}$, אז בכתיב מטריצי צריך להתקיים:

$\Psi(t)\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\\\vdots\\u_n'(t)\end{pmatrix}=G(t)$. למערכת זו יש תמיד פתרון כי $W(t)=|\Psi(t)|\neq 0$. ניתן לפתור בשיטת קרמר, כלומר:

$u_i'=\frac{|\Psi^i(t)|}{|\Psi(t)|}$, כאשר $\Psi^i(t)$ הוורונסקיאן שעמודתו ה-i-ית מוחלפת בווקטור $G(t)$.

פתרון משוואות דיפרנציאליות ע"י טורים

תזכורת מחדו"א 1מ:

טור חזקות – הגדרה:
טור חזקות הוא טור מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + a_2\left(x-x_0\right)^2 + \dots$$

תכונות טור חזקות:

1. טור חזקות מתכנס תמיד ב x_0.
2. איברי טור חזקות הם תמיד פונקציות רציפות, גזירות ואינטגרביליות.
3. אינטגרציה וגזירה של טור חזקות תיתן תמיד טור חזקות.

משפטים לגבי טורי חזקות:

1. לכל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ קיים $0 \le R \le \infty$ כך ש:
לכל $|x| < R$ הטור מתכנס ולכל $|x| > R$ הטור מתבדר. R נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור.
2. חישוב רדיוס ההתכנסות של טור:
אם קיים במובן הרחב: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, או לחילופין $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, אז $R \equiv \frac{1}{q}$.
כאשר: אם $q=0$ אז $R \equiv \infty$, ואם $q = \infty$ אז $R \equiv 0$.
3. טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור שחלקי לתחום ההתכנסות שלו.
מסקנה: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ רציפה בכל תחום ההתכנסות.
4. טור הנגזרות של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$. רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות זהה לרדיוס ההתכנסות של הטור.
5. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות, בעל רדיוס התכנסות $R > 0$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'$, לכל x בתחום ההתכנסות של טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$.

חיוני: הזזת אינדקסים בטור:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k-s}^{\infty} a_{n+s} x^{n+s} = \sum_{n=k+s}^{\infty} a_{n-s} x^{n-s}.$$

לדוגמה:

$$\sum_{n=3}^{\infty} (2n+1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+5) a_{n+2} x^n$$

נקודה רגולארית – הגדרה:
x_0 תקרא נקודה רגולארית של המשוואה

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

כאשר היא נמצאת בתחום הרציפות של $p(x)$ ו $q(x)$.
הערה: שימו לב לעובדה שהמשוואה מנורמלת.

נקודה סינגולארית – הגדרה:
x_0 תקרא נקודה סינגולארית של המשוואה

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

כאשר $p(x)$ ו/או $q(x)$ לא מוגדרות ב x_0.

<u>נקודה סינגולארית רגולארית – הגדרה:</u>

x_0 תקרא נקודה סינגולארית רגולארית של המשוואה

$$y''+p(x)y'+q(x)=0$$

כאשר $p(x)$ ו/או $q(x)$ לא מוגדרות ב x_0 וגם x_0 נקודה רגולארית של $(x-x_0)p(x)$ ושל $(x-x_0)^2q(x)$.

<u>משפט על פתרון משוואה דיפרנציאלית בעזרת טור, סביב נקודה רגולארית</u>

תהי x_0 נקודה רגולארית של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)=0$.

אזי קיים פתרון $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, המתכנס לפחות במעגל הנתחם ע"י הנקודה הסינגולארית המרוכבת הקרובה ביותר של $p(x)$ או $q(x)$.

אם הפתרון שלנו הוא $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, אז ממשפט הקיום והיחידות נוכל לקבל פתרון יחיד מתנאי ההתחלה. הפתרון $y_1(x)$ יתקבל עבור תנאי ההתחלה: $\begin{cases} y(0)=a_0=1 \\ y'(0)=a_1=0 \end{cases}$;

הפתרון $y_2(x)$ יתקבל עבור תנאי ההתחלה: $\begin{cases} y(0)=a_0=0 \\ y'(0)=a_1=1 \end{cases}$.

לכן ניתן לכתוב את הפתרון הכללי כך: $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$.

<u>משפט על פתרון משוואה דיפרנציאלית בעזרת טור, סביב נקודה סינגולארית רגולארית</u>

תהי x_0 נקודה סינגולארית רגולארית של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)=0$.

אזי קיים פתרון פרטי מהצורה $y_1(x)=(x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, $a_0=1$. כאשר r_1 שורש של המשוואה האינדיציאלית: $r(r-1)+p_0r+q_0=0$, כאשר $p_0\equiv\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)$ ו $q_0\equiv\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)$.

קיים פתרון נוסף מהצורה $y_2(x)=(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n+\alpha y_1(x)\ln(x-x_0)$, כאשר נחליט ש:

1. $r_1\ge r_2$;
2. אם r_1-r_2 אינו מספר שלם אז $\alpha=0$;
3. אם r_1-r_2 מספר שלם ושונה מ 0, אזי $\alpha=0$ או $\alpha=1$;
4. אם $r_1-r_2=0$ אזי $\alpha=1$ וגם $b_0=0$.

לא נטפל במקרים של שורשים מרוכבים.